Die

ebene Trigonometrie.

Holzschnitte
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

Die

ebene Trigonometrie,

zum

Gebrauche beim Unterricht und zum Selbststudium

bearbeitet

von

August Uhde,
Dr. phil., Schulrath und Professor am Herzogl. Collegio Carolino zu Braunschweig.

Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Braunschweig,
Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.
1860.

Vorwort.

Zu der vorliegenden Bearbeitung der ebenen Trigonometrie bin ich zunächst durch das Bedürfniß des eigenen Unterrichts veranlaßt. In meine Vorlesungen über höhere Mathematik treten regelmäßig auch solche Schüler ein, welchen die Lehrsätze und Regeln der ebenen Trigonometrie noch nicht geläufig genug sind, und andere, welchen die Auffassung der Winkelfunctionen als rein arithmetischer Verhältnisse noch fremd ist. Ich sehe mich daher genöthigt, den Vorträgen über analytische Geometrie eine gedrängte Darstellung der Trigonometrie mit Hervorhebung ihrer arithmetischen Seite voraufgehen zu lassen. Diesen Theil der Vorlesungen besuchen stets auch solche Studirende, welchen es vorzugsweise um die praktischen Anwendungen der Wissenschaft zu thun ist. Ich kann aber dem Vortrage der Trigonometrie an dieser Stelle, aus Rücksicht auf den eigentlich zu behandelnden Gegenstand, nicht so viel Zeit widmen, um ihre Lehrsätze und Regeln vollständig einzuüben, und muß Vieles der häuslichen Wiederholung und Durcharbeitung der Schüler überlassen. Dabei wird vielen ein Leitfaden unentbehrlich und um so nützlicher, je vollständiger und genauer er den Inhalt und Gedankengang des Vortrags wiedergiebt. Die mir bekannten Bearbeitungen der Trigonometrie, namentlich in denjenigen Lehrbüchern, welche meine Zuhörer zu besitzen pflegen, weichen aber von der Darstellungsweise und dem Entwickelungsgange, welche ich für die naturgemäßesten und zweckmäßigsten halte, weiter ab, als daß es für den angegebenen Zweck hätte genügen können, auf sie zu verweisen. Für meinen Zweck wenigstens schien mir daher die Veröffentlichung dieser neuen Bearbeitung der Trigonometrie gerechtfertigt.

Ob nun die Eigenthümlichkeiten meiner Darstellungsweise, wie ich hoffe, auch Vorzüge sind, haben Andere zu beurtheilen. Kennern, welche sich die Mühe der Vergleichung geben wollen, werden solche Eigenthümlichkeiten nicht entgehen. Aus mehrjähriger Erfahrung kann ich versichern, daß sich meine Schüler die Lehren der Trigonometrie in der Form und Anordnung, wie ich sie hier gebe, verhältnißmäßig leicht und sicher aneignen.

Da ich um des angegebenen Zweckes willen in der Entwickelung und Begründung der einzelnen Begriffe, Lehrsätze und Regeln habe ausführlicher sein müssen, als es sonst ein Lehrbuch zu sein braucht, welches die Ergänzung durch den mündlichen Vortrag voraussetzt, und da ich dem Anfänger, wo es nöthig schien, auch durch Ausführung einzelner Beispiele zu Hülfe gekommen bin; so glaube ich, daß meine Abhandlung der Trigonometrie sich auch zum Selbststudium eignen wird.

Braunschweig, im October 1859.

A. Uhde.

Inhaltsverzeichniß.

Anhang.

§. 1.

Aufgabe der ebenen Trigonometrie.

Das Dreieck ist die einfachste unter den ebenen geradlinigen Figuren. Alle mehrseitigen ebenen Figuren lassen sich als Summen oder Differenzen von Dreiecken darstellen. Die Untersuchungen über ebene geradlinige und nicht minder über ebene krummlinige Figuren kommen daher insgesammt auf die Lehre vom Dreieck zurück; und überhaupt alle geometrischen Untersuchungen fußen auf dieser Lehre.

In der Lehre vom Dreieck wird der Zusammenhang unter den Grundbestandtheilen dieser Figur aufgesucht. — Von den drei Seiten des Dreiecks gilt im Allgemeinen, daß je zwei derselben zusammen größer sind als die dritte, von den drei Winkeln, daß sie zusammen immer zwei rechte betragen. — Es wird ferner nachgewiesen, daß durch je drei willkürliche Grundbestandtheile des Dreiecks (also nicht drei Winkel) die übrigen drei völlig bestimmt werden, einen einzigen Fall ausgenommen. Wenn nämlich zur Bildung eines Dreiecks ein spitzer Winkel, die ihm gegenüber- und eine an ihn zu legende Seite gegeben sind, und jene zwar kürzer als diese, aber länger als ein Loth ist, welches von dem Ende der anliegenden auf den zweiten Schenkel des Winkels gefällt werden kann, so ist die Construction des Dreiecks nicht völlig bestimmt, sondern zweideutig, indem die dem Winkel gegenüberzulegende Seite auf die eine oder andere Seite des bezeichneten Lothes gelegt werden kann. Enthalten daher zwei Dreiecke dieselben drei willkürlichen Grundbestandtheile in derselben Anordnung, — auch den eben berührten Fall unter der Bedingung mit eingeschlossen, daß die dem Winkel gegenüberliegende Seite in beiden Dreiecken die nämliche Lage hat; — so sind beide Dreiecke in allen Stücken gleich oder congruent. Die Lehre von der Congruenz der Dreiecke weist die völlige Uebereinstimmung zweier Dreiecke in den fünf einzelnen Voraussetzungen nach, in welchen drei ihrer Grundbestandtheile in derselben Anordnung als gleich angenommen werden können.

Sind gewisse Grundbestandtheile der Figur von anderen abhängig, so müssen nothwendig jene sich ändern, sobald diese sich ändern. An die Lehre von der Congruenz der Dreiecke schließen sich daher naturgemäß Untersuchungen an, unter welchen Voraussetzungen die abhängigen Grundbestandtheile des Dreiecks größer oder kleiner werden.

Die Vergleichung solcher Dreiecke, welche dieselben Winkel besitzen, lehrt sodann, daß in je zwei solchen Dreiecken die gleichliegenden Seiten, paarweise verglichen, dasselbe Verhältniß zu einander haben. Gleichwinkligkeit der Dreiecke hat die Proportionalität ihrer gleichliegenden Seiten zur Folge, und umgekehrt. Dreiecke, deren Winkel gleich und deren Seiten, in derselben Ordnung verglichen, proportional sind, heißen ähnlich. Aus der Gleichheit zweier Winkelpaare folgt die Gleichheit des dritten Winkelpaares von selbst, und die Gleichheit der Verhältnisse des ersten und zweiten Seitenpaares mit dem Verhältnisse des dritten schließt die Gleichheit des ersten und zweiten Verhältnisses in sich. Der Begriff der Aehnlichkeit zweier Dreiecke fordert also nur noch vier Beziehungen unter ihren Grundbestandtheilen, und die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke weist nach, daß und unter welchen Beschränkungen von diesen vier Beziehungen je zwei die beiden anderen bedingen.

Mit den angedeuteten Untersuchungen ist aber die Lehre von dem Zusammenhange unter den Grundbestandtheilen des Dreiecks noch nicht erschöpft. Um diesen Zusammenhang vollständig zu kennen, muß man nicht bloß wissen, daß, sondern auch, in welcher Weise durch je drei willkürliche Grundbestandtheile die übrigen bestimmt werden. Es genügt nicht, in jedem besonderen Falle durch wirkliches Zusammenlegen der gegebenen Grundbestandtheile das gesuchte Dreieck, oder mit Abänderung der Seiten in einem bestimmten gleichbleibenden Verhältnisse ein dem gesuchten ähnliches Dreieck herstellen, und in diesem durch Messung die Größe der abhängigen Grundbestandtheile finden zu können. Man muß auch das allgemeine Gesetz des Zusammenhanges unter den willkürlichen und abhängigen Grundbestandtheilen der Figur kennen, — das ist die bestimmte Form der Abhängigkeit gewisser Grundbestandtheile von anderen, welche alle Fälle derselben Art unter sich begreift und für alle einzelnen Werthe derselben Größen die nämliche bleibt. Erst ein solches Gesetz macht es möglich, von den jedesmaligen besonderen Werthen der willkürlichen Grundbestandtheile auf die entsprechenden Werthe der abhängigen zu schließen.

Ein Gesetz, welches den Zusammenhang unter Größen darstellen soll, muß sich in arithmetischer Form aussprechen. An die Stelle der Größen treten Zahlen, welche den Werth der Größen im Verhältniß zu ihrer gleichartigen Einheit ausdrücken. Zur Bezeichnung aller beliebigen Zahlwerthe, deren die Größen fähig sind, dienen die Buchstaben. Die Beziehungen und Verknüpfungen, welche unter den Größen und ihren Stellvertretern, den Zahlen, stattfinden sollen, werden durch Rechnungszeichen dargestellt. Das Gesetz selbst spricht sich alsdann in der Bedingung aus, daß eine bestimmt formulirte Größenverbindung einer anderen Größe oder Größenverbindung gleich sei. Aus Gleichungen dieser Art ergeben sich durch gehörige Umformung auch die Regeln, nach welchen die eine oder andere der in sie verflochtenen Größen aus den anderen zu berechnen ist.

Die Gesetze des Zusammenhanges unter den Grundbestandtheilen des Dreiecks zu entwickeln und daraus die Regeln abzuleiten, nach welchen aus je drei willkürlichen Grundbestandtheilen der Figur jeder der abhängigen zu berechnen ist, das ist die Aufgabe der **ebenen Trigonometrie.**

Anmerk. Dasselbe für die dreiseitige körperliche Ecke oder das durch sie bedingte sphärische Dreieck zu leisten, ist die Aufgabe der sphärischen Trigonometrie.

§. 2.

Begriff und Benennung der Winkelfunctionen.

Die Aufgabe der Trigonometrie begegnet sofort einer Schwierigkeit, an welcher ihre Lösung scheitern müßte, wenn dieselbe nicht zu umgeben oder mittelbar zu beseitigen wäre. Man soll aus der Größe von Winkeln auf die Größe von Seiten schließen und umgekehrt. Winkel und Seiten einer Figur sind aber ungleichartige Größen, und durch Rechnen lassen sich aus Zahlenwerthen unmittelbar nur gleichartige Zahlen herleiten. Die Einheit der Seite ist eine Länge (Fuß, Zoll, Ruthe, Meile u. s. w.); die Einheit des Winkels selbst ein Winkel (Grad, Minute, Secunde u. s. w.). Durch arithmetische Operationen lassen sich aus Längen keine Winkel und aus Winkeln keine Längen herleiten. Gleichwohl hängen in der Figur jene von diesen und diese von jenen ab. —

Die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke bietet das Mittel dar, von der Größe der Winkel auf die Länge der Seiten zu schließen, und umgekehrt. In Dreiecken mit gleichen Winkeln bleibt sich das Verhältniß von je zwei ~~ähnlich~~ gleich liegenden Seiten gleich, wie auch die absolute Länge dieser Seiten sich ändern mag. Wäre also für je zwei Winkel, die sich in einem Dreiecke vereinigen lassen (der dritte ist durch sie mit bestimmt), das Verhältniß von je zwei, unter diesen Winkeln zusammenstoßenden Seiten des Dreiecks bekannt, so ließe sich, wenn von einem Dreieck mit denselben Winkeln nur eine seiner Seiten gegeben wäre, die Länge der beiden anderen Seiten vermittelst jener bekannten Verhältnisse berechnen. Es würde aber zu unübersehbaren Weitläufigkeiten führen, wollte man für jede Combination von zwei Winkeln, die zusammen in einem Dreieck vorkommen können, — die Möglichkeit einmal vorausgesetzt, — das Verhältniß von je zwei zugehörigen Seiten ermitteln. (Man überschlage nur, um sich von dem Umfange einer solchen Arbeit zu überzeugen, die Menge möglicher Combinationen, wenn man die beiden in einem Dreieck zusammenzustellenden Winkel innerhalb der ihnen gesetzten Grenzen von Minute zu Minute zu- oder abnehmen lassen wollte.) Ungleich einfacher wird die Aufgabe, wenn man den einen der beiden Winkel ein für alle Mal feststellt und für alle Werthe, welche der zweite Winkel daneben annehmen kann, unverändert beibehält. Das Verhältniß zwischen je zwei Seiten des Dreiecks erscheint alsdann nur noch abhängig von der Größe dieses e i n e n veränderlichen Winkels und ist nur noch für jeden besondern Werth desselben zu ermitteln. In dieser Beschränkung ist in der That die Aufgabe gelöst, und zwar unter der Annahme, daß der eine unveränderliche Winkel des Dreiecks ein rechter ist.

Der rechte Winkel ist für den angegebenen Zweck als der feststehende im Dreieck offenbar aus dem Grunde gewählt, weil jedes nicht rechtwinklige Dreieck sich als Summe oder Differenz von zwei rechtwinkligen darstellen läßt. Man braucht zu dem Ende nur von einer Ecke desselben auf die gegenüberliegende Seite ein Loth zu fällen. Daneben empfiehlt sich die Wahl des rechten Winkels auch noch dadurch, weil die drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks in der bekannten, durch den Pythagoräischen Lehrsatz angegebenen Beziehung stehen ($a^2 = b^2 + c^2$, wenn a die Länge der Hypotenuse, und b und c die Längen der Katheten bedeuten), nach welcher aus der Länge von je zwei Seiten allemal die Länge der dritten berechnet werden kann.

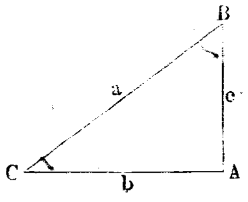
Angenommen nun, im rechtwinkligen Dreieck werde das Verhältniß der Seiten zu einander als abhängig von einem der spitzen Winkel gedacht, so wird jedes Verhältniß zwischen zwei Seiten dieses Dreiecks eine **Function des Winkels** genannt, — eine trigonometrische oder goniometrische Function (von γόνυ = Winkel).

Es giebt offenbar mit Rücksicht auf die Lage der Seiten gegen einen der spitzen Winkel im rechtwinkligen Dreieck sechs verschiedene Verhältnisse von je zwei Seiten dieser Figur. Jedes dieser Verhältnisse hat als Function des Winkels einen besonderen Namen erhalten.

1. Das Verhältniß der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete zu der Hypotenuse heißt der **Sinus** des Winkels.

Der Kürze und leichteren Verständlichkeit wegen sollen fortan die drei Winkel eines Dreiecks mit A, B und C, die drei Seiten mit a, b und c, und zwar jede mit dem entsprechenden Buchstaben wie der ihr gegenüberliegende Winkel, bezeichnet werden. Diese Bezeichnung macht die gegenseitige Lage der einzelnen Grundbestandtheile auch ohne Figur kenntlich.

Fig. 1.



In der nebenstehenden Fig. 1, in welcher der Winkel A ein rechter ($= 90^0$) sein soll, ist demnach

$$\frac{c}{a} = \textit{sinus}\, C, \text{ abgekürzt geschrieben } = \sin C, \text{ und } \frac{b}{a} = \sin B. \quad (1$$

2. Das Verhältniß der dem Winkel anliegenden Kathete zu der Hypotenuse heißt der **Cosinus** des Winkels.

$$\frac{b}{a} = \textit{cosinus}\, C, \text{ abgekürzt } = \cos C, \quad \text{und } \frac{c}{a} = \cos B. \quad (2$$

3. Das Verhältniß der dem Winkel gegenüberliegenden Kathete zu der anliegenden heißt die **Tangente** des Winkels.

3) $\frac{c}{b} = tangens\, C$, abgekürzt $= tang\, C = tg\, C$, und $\frac{b}{c} = tg\, B$.

4. Das Verhältniß der Hypotenuse zu der dem Winkel gegenüberstehenden Kathete heißt die **Cosecante** des Winkels.

4) $\frac{a}{c} = cosecans\, C = cosec\, C$ und $\frac{a}{b} = cosec\, B$.

5. Das Verhältniß der Hypotenuse zu der dem Winkel anliegenden Kathete heißt die **Secante** des Winkels.

5) $\frac{a}{b} = secans\, C = sec\, C$ und $\frac{a}{c} = sec\, B$.

6. Das Verhältniß der dem Winkel anliegenden Kathete zu der gegenüberliegenden heißt die **Cotangente** des Winkels.

6) $\frac{b}{c} = cotangens\, C = cot\, C$ und $\frac{c}{b} = cot\, B$.

§. 3.

Beziehungen der verschiedenen Functionen desselben Winkels zu einander.

Es fällt sofort auf, daß die drei zuletzt genannten Functionen nur die umgekehrten Werthe der drei zuerst genannten Functionen desselben Winkels sind.

Es ist nämlich:

7) $$\left[\frac{a}{c} =\right] \quad cosec\, C = \frac{1}{sin\, C} \quad \left[= \frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)}\right]$$

8) $$\left[\frac{a}{b} =\right] \quad sec\, C = \frac{1}{cos\, C} \quad \left[= \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)}\right]$$

9) und $$\left[\frac{b}{c} =\right] \quad cot\, C = \frac{1}{tg\, C} \quad \left[= \frac{1}{\left(\frac{c}{b}\right)}\right]$$

oder umgekehrt:

$$sin\, C = \frac{1}{cosec\, C}$$

$$cos\, C = \frac{1}{sec\, C}$$

und

$$tg\, C = \frac{1}{cot\, C}.$$

In den Formeln und Rechnungen der Trigonometrie werden daher die drei letztgenannten Functionen (*cosec*, *sec* und *cot*) selten gebraucht, und wo sie vorkommen, können sie durch die umgekehrten Werthe der zuerst genannten Functionen $\left(\frac{1}{sin}, \frac{1}{cos} \text{ und } \frac{1}{tg}\right)$ ersetzt werden.

Sinus, Cosinus und Tangente eines Winkels stehen aber auch unter sich in den engsten Beziehungen. Diese Beziehungen ergeben sich aus dem bekannten Zusammenhange unter den drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks (dem Pythagoräischen Lehrsatze).

Da nämlich

$$c^2 + b^2 = a^2,$$

so ist

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = 1$$

oder

$$\mathbf{sin\, C^2 + cos\, C^2 = 1,} \tag{10}$$

in Worten: das Quadrat des Sinus und das Quadrat des Cosinus eines und desselben Winkels sind zusammen immer = 1.

Aus dieser Formel ergiebt sich

$$sin\, C = \sqrt{1 - cos\, C^2}$$

und

$$cos\, C = \sqrt{1 - sin\, C^2}.$$

Es ist ferner:

$$\mathbf{tg\, C = \frac{c}{b} = \frac{c/a}{b/a} = \frac{sin\, C}{cos\, C};} \tag{11}$$

mithin auch

$$tg\, C = \frac{sin\, C}{\sqrt{1 - sin\, C^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{sin\, C^2} - 1}} \quad \left[= \frac{1}{\sqrt{cosec\, C^2 - 1}}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{1 - cos\, C^2}}{cos\, C} = \sqrt{\frac{1}{cos\, C^2} - 1} \quad \left[= \sqrt{sec\, C^2 - 1}\right].$$

Um umgekehrt den Sinus oder Cosinus eines Winkels durch seine Tangente auszudrücken, erhält man aus den vorigen Formeln:

12) $$sin\, C^2 = \frac{tg\, C^2}{1 + tg\, C^2}, \quad \text{also} \quad sin\, C = \frac{tg\, C}{\sqrt{1 + tg\, C^2}}$$

und

13) $$cos\, C^2 = \frac{1}{1 + tg\, C^2}, \quad \text{also} \quad cos\, C = \frac{1}{\sqrt{1 + tg\, C^2}}.$$

Aus dem Vorstehenden erhellt, daß aus irgend einer Function eines Winkels alle übrigen Functionen desselben Winkels sich berechnen lassen.

§. 4.

Beziehungen unter den Functionen zweier Winkel, die sich zu einem rechten ergänzen.

Aus den obigen Begriffsbestimmungen der verschiedenen Winkelfunctionen ergiebt sich ferner folgender Zusammenhang zwischen den Functionen zweier Winkel, die einander zu einem rechten (90^0) ergänzen.

Da in Fig. 1 $B + C = 90^0$, also $B = 90^0 - C$, so ist

14) $$sin\, C = cos\,(90^0 - C)\left[= \frac{c}{a}\right] \text{ oder } cos\, C = sin\,(90^0 - C)\left[= \frac{b}{a}\right],$$

ferner

15) $$tg\, C = cot\,(90^0 - C)\left[= \frac{c}{b}\right] \text{ oder } cot\, C = tg\,(90^0 - C)\left[= \frac{b}{c}\right],$$

und

16) $$sec\, C = cosec\,(90^0 - C)\left[= \frac{a}{b}\right] \text{ od. } cosec\, C = sec\,(90^0 - C)\left[= \frac{a}{c}\right].$$

Bezeichnet man die beiden Winkel, welche einander zu 90^0 ergänzen, durch $45^0 \mp x$ und $45^0 \pm x$, wobei allemal die beiden oberen und die beiden unteren Zeichen zusammen gehören, so nehmen die vorigen Formeln die folgende Gestalt an:

$$sin\,(45^0 \mp x) = cos\,(45^0 \pm x)$$
$$tg\,(45^0 \mp x) = cot\,(45^0 \pm x)$$

und
$$sec\,(45^0 \mp x) = cosec\,(45^0 \pm x).$$

§. 5.

Functionen der Winkel von 45°, 30° und 60°, 18° und 72°.

Für gewisse Winkel, die ein einfaches Verhältniß zum rechten haben, lassen sich die Functionen nach bekannten Sätzen der Elementargeometrie berechnen. Wir heben diese Berechnungen beispielsweise hervor, da die zu bestimmenden Werthe zum Theil auch ihrer häufigen Anwendung wegen ein Interesse haben.

1. Ein rechtwinkliges Dreieck, wie Fig. 2, dessen beide spitze Winkel einander gleich, also halbe rechte sind, $B = C = 45^0$, ist gleichschenklig; $b = c$. Mithin ist

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{2c^2} = c\sqrt{2} = \sqrt{2b^2} = b\sqrt{2}$$

und

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{a} = \frac{c}{c\sqrt{2}} = \frac{b}{b\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

oder

$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad [= 0{,}707106]. \qquad (17$$

Ferner ist

$$tg\, 45^0 = \cot 45^0 = 1 \quad \left[= \frac{c}{b}\right]. \qquad (18$$

Fig. 2.

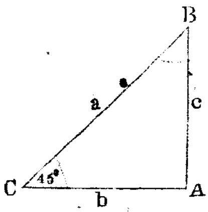
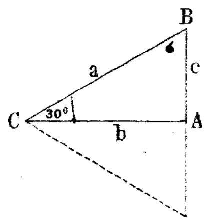


Fig. 3.



2. Wenn ein gleichseitiges Dreieck, Fig. 3, durch ein Loth von der einen Ecke auf die gegenüberliegende Seite halbirt wird, so ist in jedem der entstehenden rechtwinkligen Dreiecke der eine spitze Winkel $C = 30^0$, der andere $B = 60^0$. Nun ist ferner $c = \frac{a}{2}$ und $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ $= \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; folglich

19) $$\sin 30^0 = \cos 60^0 = \frac{1}{2} \quad \left[= \frac{c}{a} = 0{,}5\right]$$
und

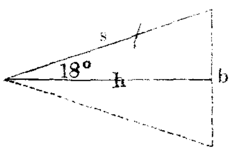
20) $$\cos 30^0 = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left[= \frac{b}{a} = 0{,}866025\right]$$
ferner

21) $$tg\, 30^0 = cot\, 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \left[= \frac{\sin 30^0}{\cos 30^0} = 0{,}577350\right]$$
und

22) $$tg\, 60^0 = cot\, 30^0 = \sqrt{3} \quad \left[= \frac{\sin 60^0}{\cos 60^0} = 1{,}732051\right].$$

3. In einem gleichschenkligen Dreieck, dessen Winkel an der Spitze $= 36^0$ ist (dem zehnten Theil des regulären Zehnecks), Fig. 4, findet bekanntlich zwischen der Basis b und dem Schenkel s die Proportion statt:

Fig. 4.



$$b : s = s : (b + s),$$

und daraus folgt:

$$b = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} . s \text{ oder } s = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} . b.$$

Wird dieses Dreieck durch ein Loth von der Spitze auf die Grundlinie, h, halbirt, so erhält man in dem entstehenden rechtwinkligen Dreiecke, dessen spitze Winkel 18° und 72° betragen,

$$\sin 18^0 = \cos 72^0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \quad \left[= \frac{b/_2}{s} = 0{,}309017\right]$$

$$\cos 18^0 = \sin 72^0 = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \quad \left[= \frac{h}{s} = 0{,}951063\right]$$

$$tg\, 18^0 = cot\, 72^0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \quad \left[= \frac{b/_2}{h} = 0{,}324918\right]$$

und

$$cot\, 18^0 = tg\, 72^0 = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5} - 1} \quad \left[= \frac{h}{b/_2} = 3{,}077685\right].$$

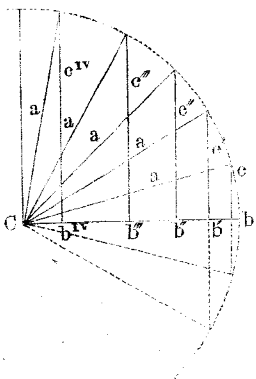
§. 6.

Aenderungen und Grenzwerthe der verschiedenen Winkelfunctionen.*

Für jeden spitzen Winkel von bestimmter Größe hat auch jede seiner Functionen einen besonderen Werth. So wie der Winkel sich ändert, ändern sich auch seine Functionen. Um diese Aenderungen in einer Uebersicht zusammenzufassen, denke man sich den einen spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks von 0^0 bis 90^0 stetig wachsend und bestimme die Werthe einer und derselben Function allemal so, daß das Maß, der Divisor oder Nenner des durch sie bezeichneten Verhältnisses, seine Größe beibehält. Alsdann gehen die Aenderungen der Function gleichen Schritt mit dem Zähler dieses Verhältnisses.

Für den Sinus und Cosinus eines Winkels ist die Länge der Hypotenuse des Dreiecks das Maß. In Fig. 5 ist deßhalb für die verschiedenen Werthe des Winkels C die Hypotenuse a als gleichbleibend angenommen, und durch die zugehörigen Längen der gegenüberstehenden Kathete c, c', c'' ꝛc. die Aenderungen des Sinus, und durch die Längen der anliegenden Kathete b, b', b'' ꝛc. die Aenderungen des Cosinus darzustellen.

Fig. 5.



Nun ist klar, daß der Sinus des Winkels zugleich mit dem Winkel selbst immerfort wächst:

$$\frac{c}{a} < \frac{c'}{a} < \frac{c''}{a} \text{ ꝛc.}$$

Diesen Satz zu beweisen, braucht man nur die verschiedenen rechtwinkligen Dreiecke noch einmal an der anderen Seite derjenigen Kathete, welche dem veränderlichen Winkel anliegt (b), zu wiederholen. In jedem der dadurch entstehenden gleichschenkligen Dreiecke ist der Winkel an der Spitze das Doppelte des gegebenen Winkels ($2C$), die Basis das Doppelte der diesem Winkel gegenüberliegenden Kathete ($2c$), und die Schenkel aller dieser gleichschenkligen Dreiecke sind einander gleich ($= a$). Wenn aber zwei Seiten in einem Dreieck so groß sind wie in einem anderen, der von ihnen eingeschlossene Winkel dagegen im einen größer ist als im andern, so ist auch die dritte Seite in jenem Dreieck größer als in diesem ($2c' > 2c$), und in derselben Beziehung, wie die ganzen Seiten, stehen auch ihre Hälften zu einander ($c' > c$).

Dabei bleibt der Sinus des Winkels stets ein **echter Bruch**, $\frac{c}{a} < 1$, weil der Zähler dieses Verhältnisses immer kleiner bleibt als sein Nenner (die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks kleiner als die Hypotenuse), $c < a$.

Mit dem Verschwinden des Winkels, $C = 0$, verschwindet auch sein Sinus, $c = 0$ und $\frac{c}{a} = 0$, und wenn der Winkel zu einem rechten wird, $C = 90^0$, fällt das gegenüberliegende Loth mit der Hypotenuse zusammen, es wird $c = a$, folglich $\frac{c}{a} = 1$ (Verhältniß der Gleichheit). Wenn also der Winkel von 0^0 bis 90^0 zunimmt, wächst sein Sinus von 0 bis 1, und man hat, indem man den Begriff des Sinus auch noch auf die Grenzwerthe des spitzen Winkels ausdehnt,

23) $$\sin\ 0^0 = 0$$

24) und $$\sin 90^0 = 1.$$

Der Cosinus eines spitzen Winkels nimmt fortwährend ab, wenn der Winkel von 0^0 bis 90^0 wächst:

$$\frac{b}{a} > \frac{b'}{a} > \frac{b''}{a} \text{ ꝛc.}$$

Dies folgt schon daraus, weil der Sinus desselben Winkels zunimmt, wenn der Winkel wächst, und $\sin C^2 + \cos C^2 = 1$ oder $\cos C = \sqrt{1 - \sin C^2}$ ist.

Auch der Cosinus eines spitzen Winkels ist immer ein **echter Bruch**, $\frac{b}{a} < 1$, weil immer $b < a$ ist. — Daß Sinus und Cosinus aller spitzen Winkel immer echte Brüche sein müssen, ergiebt sich auch aus dem Satze, daß $\sin C^2 + \cos C^2 = 1$ ist.

Je kleiner der Winkel wird, desto mehr nähert sich die Länge der anliegenden Kathete b der Länge der Hypotenuse a, und beim Verschwinden des Winkels fällt die Hypotenuse mit der anliegenden Kathete zusammen; wenn $C = 0$, wird $b = a$.

Je mehr dagegen der Winkel sich dem rechten nähert, desto kleiner wird die anliegende Kathete, und diese verschwindet gänzlich, wenn der Winkel zu einem rechten wird; wenn $C = 90^0$, wird $b = 0$.

Der Cosinus eines spitzen Winkels nimmt also von 1 bis 0 ab, wenn der Winkel von 0^0 bis 90^0 wächst, und indem man den Begriff des Cosinus auch noch von den Grenzwerthen des spitzen Winkels gelten läßt, hat man

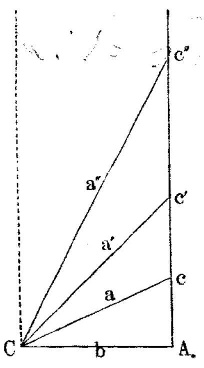
$$\cos 0^0 = 1 \tag{25}$$

und

$$\cos 90^0 = 0. \tag{26}$$

Um die Aenderungen der Tangente des Winkels übersichtlich darzustellen, muß man die Länge der anliegenden Kathete, als das Maß oder den Nenner des anzugebenden Verhältnisses, für die verschiedenen Winkelwerthe beibehalten. In Fig. 6 ist die Länge b für die verschiedenen Werthe des Winkels C festgehalten. Alsdann ist klar, daß mit dem Winkel C auch die gegenüberliegende Kathete c, folglich auch die Tangente $\frac{c}{b}$ wächst, und zwar von dem Grenzwerthe 0 an, wenn $C = 0^0$ ist, durch alle möglichen Werthe hindurch über jede Grenze hinaus oder ins Unendliche, wenn der Winkel selbst ohne Ende sich dem rechten nähert. In dem Augenblicke, wo der Winkel C in einen rechten übergeht, wird sein beweglicher Schenkel a der gegenüberliegenden Kathete c parallel und hört auf diese zu schneiden und zu begrenzen. Die Tangente des rechten Winkels ist unbestimmbar oder unendlich groß.

Fig. 6.



So lange der Winkel kleiner bleibt als 45^0, ist seine Tangente ein echter Bruch, kleiner als 1; $tg\,45^0 = 1$; und die Tangenten aller spitzen Winkel, welche mehr als 45^0 betragen, sind größer als 1, ganze Zahlen oder unechte Brüche, welche über jede Grenze hinaus größer und größer werden, so wie der Winkel mehr und mehr dem rechten sich nähert.

Alle diese Aenderungen der Tangente eines spitzen Winkels ergeben sich auch aus der Beziehung der Tangente zum Sinus und Cosinus desselben Winkels, daß $tg\,C = \frac{sin\,C}{cos\,C}$ ist, wenn man die Aenderungen dieses Verhältnisses für die gleichzeitigen Aenderungen seines Zählers und Nenners verfolgt. — Für die Grenzen des spitzen Winkels 0° und 90° erhält man durch Einführung der vorhin abgeleiteten Grenzwerthe ihrer Sinus und Cosinus als Grenzen der Tangente

27) $$tg\,0^0 = \frac{sin\,0^0}{cos\,0^0} = \frac{0}{1} = 0$$

28) und $$tg\,90^0 = \frac{sin\,90^0}{cos\,90^0} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Das Zeichen $\frac{1}{0}$, das Zeichen des sogenannten Unendlichen ($= \infty$), sagt eben nur, daß die Größe, welche damit bezeichnet werden soll, keiner Bestimmung durch eine Zahl fähig ist, indem für sie das Maß, der Nenner, verschwindet ($= 0$ wird), mithin die Vergleichung der Größe mit einer anderen ihr gleichartigen aufhört, und folgeweise auch von einem Verhältniß, welches aus dieser Vergleichung hervorgehen und durch eine Zahl ausgedrückt werden sollte, nicht mehr die Rede sein kann. Das Zeichen $\frac{1}{0}$, (wofür auch ohne wesentliche Aenderung $\frac{a}{0}$ gesetzt werden kann), bezeichnet also nicht eigentlich mehr einen Grenzwerth, sondern deutet vielmehr gerade im Gegentheil an, daß der Werth, der für eine gewisse Voraussetzung in diese Form übergeht, ins Unbegrenzte oder ohne Grenze größer wird, wenn der bedingende Werth sich der vorausgesetzten Grenze mehr und mehr nähert.

Die Aenderungen der drei übrigen Winkelfunctionen ergeben sich aus dem Vorigen von selbst.

Die Secante und die Cosecante eines spitzen Winkels sind, als die umgekehrten Werthe seines Cosinus und Sinus, immer größer als 1. Die Secante eines Winkels wächst, wenn der Winkel von 0° bis 90° zunimmt, von 1 an ins Unendliche, die Cosecante dagegen, um so größer, je kleiner der Winkel ist, und unmeßbar groß für den Winkel 0°, nimmt unter derselben Voraussetzung bis zu dem Werthe 1 ab:

$$sec\,0^0 = 1; \qquad sec\,90^0 = \frac{1}{0} = \infty$$

$$cosec\,0^0 = \frac{1}{0} = \infty; \; cosec\,90^0 = 1.$$

Die Cotangente eines spitzen Winkels, als umgekehrter Werth der Tangente, nimmt ab, wenn der Winkel wächst, bis zum völligen Verschwinden, wenn der Winkel ein rechter wird, und wächst über jede Grenze hinaus, wenn der Winkel selbst mehr und mehr dem Verschwinden sich nähert:

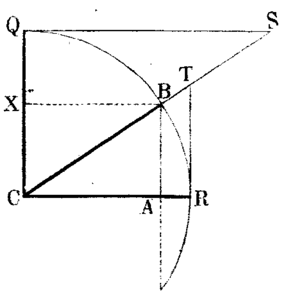
$$cot\,0^0 = \frac{1}{0} = \infty; \quad cot\,90^0 = 0.$$

§. 7.

Darstellung der Winkelfunctionen durch Linien. — Functionen von Kreisbogen.

Die Winkelfunctionen können auch durch einfache Linien anschaulich dargestellt werden. Wenn nämlich die Seite, mit welcher eine andere verglichen werden soll, als Längenmaß oder Einheit angenommen wird, so stellt die andere ohne Weiteres den Zahlwerth ihres Verhältnisses zu jener als entsprechende Länge dar. In Fig. 7 werde der willkürlich gewählte Radius des Kreisbogens RBQ, der um den Scheitel des Winkels BCA oder C beschrieben ist, als das gemeinschaftliche Längenmaß für alle übrigen Linien angenommen,

Fig. 7.



$$CR = CB = CQ = 1,$$

und der Winkel QCR so wie die Winkel bei A, R, Q und X seien rechte. Alsdann läßt sich jede Function des Winkels BCA oder C durch eine Linie von entsprechender Länge darstellen.

Es ist nämlich der früheren Erklärung zufolge

$$\frac{BA}{CB} = sin\,C,$$

also, da $CB = 1$ sein soll,

$$\frac{BA}{CB} = \frac{BA}{1} = BA = \sin C,$$

d. h. die Länge BA, auf den Radius CB als Längeneinheit bezogen, stellt den Sinus des Winkels C ($= BCA$) dar.

Es ist ferner

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CA}{1} = CA = \cos C;$$

$$\frac{BA}{CA} = \frac{TR}{CR} = \frac{TR}{1} = TR = tg\, C;$$

$$\frac{CB}{CA} = \frac{CT}{CR} = \frac{CT}{1} = CT = \sec C;$$

$$\frac{CB}{BA} = \frac{CS}{CQ} = \frac{CS}{1} = CS = \operatorname{cosec} C,$$

und

$$\frac{CA}{BA} = \frac{QS}{CQ} = \frac{QS}{1} = QS = \cot C.$$

Indem man also statt der unbenannten (abstracten) Zahl, welche das Verhältniß der Linie zu der gewählten Längeneinheit ausdrückt, diese Linie selbst setzt, hat man die Linie BA den Sinus (auch wohl die Sinuslinie), CA den Cosinus, TR die Tangente, CT die Secante, CS die Cosecante und QS die Cotangente des Winkels BCA oder C genannt. Man darf dabei aber nie vergessen, daß nicht diese Linien selbst sondern vielmehr die Zahlen, welche ihre Längen im Verhältniß zu der bestimmten Einheit (dem Kreisradius 1) ausdrücken, die bezeichneten Functionen des Winkels sind. Die Linien sind nur anschauliche Stellvertreter jener Zahlwerthe für ein bestimmtes Maß.

Mag diese Darstellung der Winkelfunctionen durch Linien vor der obigen strengeren Begriffsbestimmung immerhin den Vorzug größerer Anschaulichkeit haben; weder macht sie die Zurückführung der zu erläuternden Begriffe auf ihre wahre Bedeutung entbehrlich, noch gewährt sie größere Bequemlichkeit in der Anwendung derselben; vielmehr macht sie die Ableitung trigonometrischer Gesetze und Formeln entschieden umständlicher, weil sie von dem Verhältniß je zwei beliebiger Seiten immer auf ein entsprechendes Verhältniß einer dritten Seite zu der nämlichen Einheit (dem Kreisradius 1) zurückzugehen nöthigt.

Die hier erörterte Auffassung des Begriffs der Winkelfunctionen ist übrigens die ältere und hat bei Erfindung der Trigonometrie zur Benennung der verschiedenen Functionen die Veranlassung gegeben. Nur der Name *Sinus* ist schwer zu deuten. Nach einer mehr witzigen als nachweisbaren Vermuthung (Godin's) soll derselbe daraus entstanden sein, weil man den Sinus als die Hälfte der dem doppelten Winkel oder Kreisbogen eingeschriebenen Sehne berechnete und diese lateinisch durch *semissis inscriptae*, abgekürzt *s. ins.*, bezeichnete, woraus dann durch Zusammenziehung das corrumpirte Wort *sinus* geworden sei. Wahrscheinlicher ist, daß dieser Name durch die fehlerhafte Uebersetzung der arabischen Bezeichnung des Begriffs *(el geib)*, welche zwei Bedeutungen hat *(sectio* und *sinus)* in die mathematische Kunstsprache eingeführt ist. Die Benennungen *tangens* und *secans* erklären sich ohne Weiteres aus bloßer Ansicht der Fig. 7. Die Namen *cosinus*, *cotangens* und *cosecans* sind zusammengezogen aus den abgekürzten Bezeichnungen *co. sinus*, *co. tangens* und *co. secans*, welche *complementi sinus*, *tangens* und *secans* bedeuten, also Sinus, Tangente und Secante des Complementwinkels des gegebenen (zu 90^0). So ist $CA = BX$ der Sinus des Winkels QCB, welcher den gegebenen BCA oder C zu 90^0 ergänzt, QS die Tangente und CS die Secante dieses Complementwinkels.

Beiläufig mag noch bemerkt werden, daß die ältere Kunstsprache die Strecke AR $(= CR - CA)$ den *sinus versus* oder Quersinus des Winkels BCA, und QX $(= CQ - CX)$ den *cosinus versus* desselben Winkels nannte. Offenbar ist

$$\sin vers\, C = 1 - \cos C \tag{29}$$

und

$$\cos vers\, C = 1 - \sin C. \tag{30}$$

Endlich mag auch noch erwähnt werden, daß die Begriffe der Functionen eines Winkels auch auf den Kreisbogen übertragen sind, welcher, um den Scheitel desselben mit dem Radius 1 beschrieben, zwischen seine Schenkel fällt. Dieser Bogen dient bekanntlich als Maß des zugehörigen Centriwinkels, weil er mit demselben gleichförmig zu- und abnimmt. Man nennt so, vorausgesetzt daß $CR = CB = 1$ ist, BA $(= \sin C)$ den Sinus des Bogens BR $(= \sin BR)$, CA $(= \cos C)$ den Cosinus dieses Bogens $(= \cos BR)$ u. s. w.

Ursprünglich bezog man eben die Länge der Linien, welche mit dem Radius 1 gemessen die Functionen des Winkels darstellen, auf die Länge des zugehörigen, mit demselben Radius beschriebenen Kreisbogens, um die Function mit der durch sie zu bestimmenden Größe gleichartig zu machen, und die eine aus der anderen mit Zugrundelegung derselben Einheit unmittelbar berechnen zu können. Die Analysis erhebt diesen Zusammenhang zu einem rein arithmetischen, indem sie statt des Bogens wie statt seiner Functionen die unbenannten Zahlen setzt, welche ihre Länge in Bezug auf dieselbe Einheit ausdrücken.

§. 8.

Einrichtung der trigonometrischen Tafeln.

Die Functionen aller Winkel von 0^0 bis 90^0 sind mit Hülfsmitteln, deren Erörterung in die Analysis gehört, bis zu einem hinreichenden Grade von Genauigkeit berechnet und für den Gebrauch in Tafeln zusammengestellt, so daß zu jedem Winkel die verlangte Function oder zu jeder gegebenen Function der zugehörige Winkel mit genügender Annäherung gefunden werden kann. Da aber für die meisten Rechnungen, welche mit Winkelfunctionen auszuführen sind, die Anwendung der Logarithmen bequemer ist als die der Functionen selbst, so sind in den gewöhnlichen Tafeln auch nicht die Functionen selbst, sondern ihre Logarithmen angegeben.

Diese Logarithmen sind aber insgesammt um 10 vermehrt, weil sonst die meisten derselben, als Logarithmen echter Brüche, negative Zahlen sein würden [1]). So findet man z. B. als $\log \sin 30^0 = \log {}^1/_2 = -\log 2$ nicht $-0{,}3010300$, sondern $10 - 0{,}3010300 = 9{,}6989600$ aufgeführt, als $\log tg\, 30^0 = \log \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\log 3}{2} = -\frac{0{,}4771213}{2}$ nicht $-0{,}2385606$, sondern $10 - 0{,}2385606 = 9{,}7614394$ u. s. w. Man hat also von jedem angegebenen Logarithmen einer Function, um ihn auf den wahren zurückzuführen, 10 zu subtrahiren, und zu jedem Logarithmen, den man als den Logarithmen einer Function in den Tafeln aufsuchen will, erst noch 10 zu addiren. — Die Vorzüge der beschriebenen Einrichtung leuchten beim Rechnen mit diesen Logarithmen von selbst ein.

Die Tafeln stellen nun die Logarithmen der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten nur von Winkeln von 0^0 bis 45^0 in fortlaufender Reihe auf. Für Winkel von 45^0 bis 90^0 sind die Logarithmen dieser Functionen dadurch schon mitgegeben, da bekanntlich nach (14) und (15)

---

[1]) Nur in einigen Tafeln, wie z. B. den neuerdings (Berlin, bei Weidmann 1856) von Bremiker herausgegebenen Vega'schen, sind diejenigen Logarithmen trigonometrischer Functionen, welche an sich schon positiv werden (von Zahlen über 1), ohne die Vermehrung um 10 (die sogenannte dekadische Ergänzung) aufgeführt.

$$\sin C = \cos(90^0 - C)$$

und $$tg\ C = \cot(90^0 - C) \text{ ist.}$$

Man hat also z. B.

$\log \sin 52^0 15'$ als $\log \cos 37^0 45'$
$\log \cot 80^0 10'$ als $\log\ tg\ 9^0 50'$

aufzusuchen, und so in ähnlichen Fällen. Um aber beim Aufschlagen der Logarithmen auch diese kleinen Rechnungen zu ersparen, sind die Winkelwerthe von 0^0 bis 45^0 in den Ueberschriften und zur Linken der Tafeln und die Namen der zugehörigen Functionen in den Ueberschriften der Columnen, daneben aber die Werthe der Ergänzungswinkel unten und zur Rechten der Tafeln, und die Namen der ihnen zugehörigen Functionen in den Unterschriften der Columnen angegeben.

In den gewöhnlichen Tafeln schreiten die Winkelwerthe in der Nähe von 0^0 und 90^0 von 10 zu 10 Secunden, entfernter von diesen Grenzen von Minute zu Minute fort. Für zwischenliegende, nur um Secunden verschiedene Werthe ist, wo diese Genauigkeit gefordert wird, eine Interpolation nöthig, wobei die Aenderungen der Logarithmen den überschießenden Secunden proportional angenommen werden dürfen. Die Proportionaltheile der Logarithmen jeder einzelnen Function für 1'' sind neben diesen Logarithmen in besonderen Spalten angegeben. Diese Proportionaltheile müssen (bei der beschriebenen Einrichtung der Logarithmen) addirt oder subtrahirt werden, je nachdem die Function gleichzeitig mit dem Winkel wächst, oder mit wachsendem Winkel abnimmt.

Beispielsweise werde $\log \sin 26^0 51' 23''$ gesucht. Man findet $\log \sin 26^0 51' = 9{,}6548081$ und als Differenz des Logarithmen für 1'' 41.6 (Zehnmilliontel). Man hat also $41.6 \times 23 = 956$ Zehnmilliontel zu addiren und findet

$$\begin{array}{r} 9{,}6548081 \\ +\quad 956 \\ \hline \log \sin 26^0 51' 23'' = 9{,}6549037. \end{array}$$

Um ferner $\log \cos 35^0 40' 42''$ zu bestimmen, findet man

$$\begin{array}{lll} \log \cos 35^0 40' & = 9{,}9097821 & \quad Diff\ 1'' = 15.1 \\ & -\quad\quad 634 \ldots\ldots\ldots & = 15.1 \times 42 \\ \hline \log \cos 35^0 40' 42'' & = 9{,}9097187. & \end{array}$$

Das Verfahren, um zu dem gegebenen Logarithmen der Function eines Winkels diesen Winkel selbst bis auf einzelne Secunden genau zu bestimmen, ergiebt sich hiernach von selbst.

§. 9.

Auflösung rechtwinkliger und gleichschenkliger Dreiecke.

Mit Hülfe der trigonometrischen Tafeln lassen sich alle Aufgaben, welche das rechtwinklige Dreieck betreffen, auf Grundlage der früheren Erklärungen der Winkelfunctionen (§. 2) und des Pythagoräischen Lehrsatzes auflösen. Es liegt im Begriffe des rechtwinkligen Dreiecks, daß der eine seiner Winkel als rechter bekannt ist. Um das Dreieck vollständig zu bestimmen, brauchen also nur noch zwei Stücke gegeben zu sein, unter diesen aber mindestens eine Seite. Zur Berechnung aller übrigen Stücke oder, wie man sagt, zur Auflösung der Figur, genügen alsdann (natürlich außer dem Satze, daß die Summe der drei Winkel im Dreieck zwei rechte beträgt) die nachstehenden Gleichungen, — aus welchen die in Klammern beigesetzten durch bekannte algebraische Umformungen sich ergeben:

31) I. $\frac{c}{a} = \sin C; \quad \left[c = a \cdot \sin C; \quad a = \frac{c}{\sin C}\right]$

32) II. $\frac{b}{a} = \cos C; \quad \left[b = a \cdot \cos C; \quad a = \frac{b}{\cos C}\right]$

33) III. $\frac{c}{b} = tg\, C; \quad \left[c = b \cdot tg\, C; \quad b = \frac{c}{tg\, C}\right]$

34) IV. $a^2 = b^2 + c^2; \left[a = \sqrt{b^2 + c^2};\ c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)}\right].$

Zur Erläuterung dieser Formeln einige Beispiele.

1. Ein Weg (schiefe Ebene) steigt auf je 35 Fuß 2 Fuß; wie groß ist seine Neigung gegen den Horizont?

Hier ist $c = 2$, $a = 35$ und $\frac{c}{a} = \frac{2}{35} = \sin C$, mithin

$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log 35 = 1{,}5440680$$
$$\log \frac{2}{35} = 8{,}7569620\ (-\ 10) = \log \sin 3^\circ\, 7'\, 41''$$

also die Neigung $C = 3^\circ\, 7'\, 41''$.

2. Wie groß ist die Kraft, womit eine Last von 3000 Pfund auf einer schiefen Ebene zu halten ist, die unter einem Winkel von $15^\circ\, 30'$ gegen den Horizont geneigt ist?

Bekanntlich verhält sich die Kraft x, womit eine Last p eine schiefe Ebene herabzugleiten strebt (oder hinaufgezogen werden muß), zu dieser Last, wie die Höhe der schiefen Ebene c zu der Länge derselben a. Man hat also

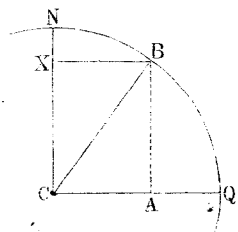
$$\frac{x}{p} = \frac{x}{3000} = \frac{c}{a} = sin\ C = sin\ 15^0\, 30'$$

und $\quad x = 3000 \,.\, sin\ 15^0\, 30'$

$$\begin{aligned} log\ 3000 &= 3{,}4771213 \\ (+)\ log\ sin\ 15^0\, 30' &= 9{,}4268988 - 10 \\ \hline log\ x &= 2{,}9040201 = log\ 801{,}71 \\ x &= 801{,}71 \text{ Pfund.} \end{aligned}$$

3. Wie groß ist der Radius des Kreises, in welchem ein Punkt an der Erdoberfläche, dessen geographische Breite 52° 16′ beträgt, seine tägliche Umdrehung macht, — den Erdradius zu 860 Meilen angenommen?

Fig. 8.



In der nebenstehenden Fig. 8 mag Q einen Punkt des Aequators, N den Pol und B den Ort, dessen geographische Breite (Bog. $BQ =$) $BCQ = 52^0\, 16'$ ist, darstellen. Alsdann ist offenbar der Radius des gesuchten Kreises

$$BX = CA = CB \,.\, cos\, BCQ,$$

mithin da CB der Erdradius $=$ 860 Meilen angenommen ist,

$$\begin{aligned} BX &= 860 \,.\, cos\ 52^0\, 16'. \\ log\ 860 &= 2{,}9344985 \\ (+)\ log\ cos\ 52^0\, 16' &= 9{,}7867424\ (-\ 10) \\ \hline log\ BX &= 2{,}7212409 = log\, 526{,}31. \end{aligned}$$

4. In welchem Verhältniß steht die volle Stärke (Intensität) der erdmagnetischen Kraft zu ihrer horizontalen Stärke, wenn die magnetische Inclination $= 67^0\, 25'$ ist?

Wird die horizontale Intensität des Erdmagnetismus durch 1, die gesuchte Kraft durch x bezeichnet, so ist nach den angegebenen Beziehungen

$$\frac{1}{x} = cos\ 67^0\, 25', \text{ also } x = \frac{1}{cos\ 67^0\, 25'}$$

$$log\ x = -\ log\ cos\ 67^0\, 25' = -\ (9{,}5843615\ -\ 10) = 0{,}4156385$$

und $\quad x = 2{,}60398.$

5. Wie hoch ist ein Baum, der bei der Sonnenhöhe von 38° 44′ [am Mittage des Aequinoctiums an einem unter 52° 16′ geographischer Breite gelegenen Orte, — wo die Sonne im höchsten Punkte des Aequators steht,] auf horizontalem Boden einen 118 Fuß langen Schatten wirft? — [oder: dessen Spitze in 118 Fuß horizontaler Entfernung von der Mitte seines Stammes unter einem (Vertical-) Winkel von 38° 44′ einvisirt wird?]

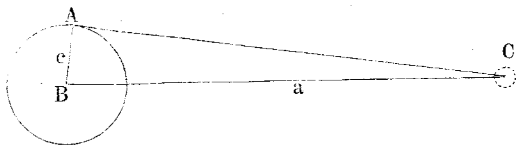
Hier ist $C = 38^0\, 44'$, $b = 118$ Fuß, und die gesuchte Höhe $c = b \,.\, tg\ C$
$= 118 \,.\, tg\ 38^0\, 44'$

$$\begin{aligned} log\ 118 &= 2{,}0718820 \\ (+)\ log\ tg\ 38^0\, 44' &= 9{,}9042321\ (-\ 10) \\ \hline log\ c &= 1{,}9761141 = log\ 94{,}6(48). \end{aligned}$$

6. Die mittlere Horizontalparallaxe des Mondes — (d. i. der Winkel C, Fig. 9 (a. f. S.), unter welchem zwei Gesichtslinien, die eine (AC) von einem Punkte an der Erdoberfläche, in dessen Horizonte der Mond steht, [tangential an die

Erdoberfläche], die andere (BC) von dem Mittelpunkte der Erde auf die Mitte des Mondes gerichtet, gegen einander geneigt sind,) — beträgt 57′ 1″; wie groß ist

Fig. 9.



danach der mittlere Abstand des Mondes von der Erde, den Erdradius zu 860 Meilen gerechnet?

In diesem Falle ist $C = 57' \, 1''$, $c = 860$ und der gesuchte Abstand

$$a = \frac{c}{\sin C} = \frac{860}{\sin 57' \, 1''}.$$

$$\begin{aligned} \log 860 &= 2{,}9344985 \\ (-) \log \sin 57' \, 1'' &= 8{,}2197080 \; (-10) \\ \hline \log a &= 4{,}7147905 = \log 51855; \end{aligned}$$

a ungefähr 51800 Meilen.

7. Wenn in diesem Abstande von der Erde aus gesehen der Mondhalbmesser unter einem Winkel von 15′ 33″,7 erscheint, wie groß ist danach der Mondhalbmesser?

Derselbe berechnet sich (da die Gesichtslinie an die Kugelfläche dieselbe berühren muß), als $a \, . \sin 15' \, 33{,}7''$, also da

$$\begin{aligned} \log a &= 4{,}7147905 \\ (+) \log \sin 15' \, 33{,}7'' &= 7{,}6557748 \; (-10) \\ \hline & 2{,}3705653 = \log 234{,}7 \text{ ist,} \end{aligned}$$

zu ungefähr 234 Meilen.

Die Auflösung des gleichschenkligen Dreiecks wird auf die des rechtwinkligen Dreiecks durch den bekannten Satz zurückgeführt, daß das

Fig. 10.

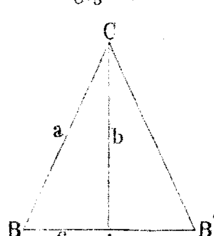
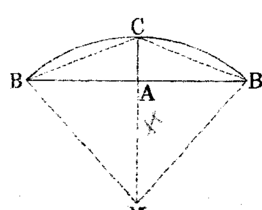


Fig. 11.



gleichschenklige Dreieck durch ein Loth von der Spitze auf die Basis in zwei congruente rechtwinklige zerlegt wird. Man setze nur den Winkel

an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks BCB', Fig. 10, $= 2C$, die Basis $(BB') = 2c$, die Höhe $(CA) = b$, die Schenkel $(BC = B'C) = a$ und die Winkel an der Basis $= B$; so gelten die vorhin für das rechtwinklige Dreieck aufgestellten Formeln unverändert für die eine Hälfte des gleichschenkligen. Oder will man den Winkel an der Spitze $(BCB') = C$, die Basis $(BB') = c$, alle übrigen Stücke aber wie vorhin nennen; so müßte in die vorigen Formeln nur $\frac{C}{2}$ statt C und $\frac{c}{2}$ statt c gesetzt werden, um sie ohne Weiteres auf das gleichschenklige Dreieck anwenden zu können.

Hierzu noch folgende Beispiele:

8. Die Spannweite eines Gewölb- (Kreis-) Bogens BB', Fig. 11, soll gleich 18 Fuß, seine Pfeilhöhe CA (d. i. der senkrechte Abstand seines Mittelpunktes C von seiner Sehne) $= 3{,}5$ Fuß sein; wie groß ist dieser Bogen? und wie groß sein Radius?

Denkt man sich von dem Ende des Bogens nach der Mitte die Sehnen BC und $B'C$ gezogen, so berechnet sich in dem entstandenen gleichschenkligen Dreiecke der halbe Winkel an der Spitze BCA oder C durch

$$\frac{BA}{CA} = \frac{9}{3{,}5} = tg\ C.$$

$$\begin{array}{rl} log\ 9 = & 0{,}9542425 \\ (-)\ log\ 3{,}5 = & 0{,}5440680 \\ \hline & 10{,}4101745 = log\ tg\ 68^0\ 44'\ 58{,}2''. \end{array}$$

Nun ist der auf dem Bogen BCB' stehende Peripheriewinkel $= 180^0 - 2C$, folglich der auf demselben Bogen stehende Centriwinkel

$$BMB' = 360^0 - 4C = 85^0\ 0'\ 7{,}2'' = \text{Bog. } BCB'.$$

Der Radius dieses Bogens aber, BM, ist $= \frac{\frac{1}{2} BB'}{sin\ \frac{1}{2} BMB'}$

$$\begin{array}{rl} log\ 9 = & 0{,}9542425 \\ (-)\ log\ sin\ 42^0\ 30'\ 3{,}6'' = & 9{,}8296916 \\ \hline & 1{,}1245509 = log\ 13{,}3214. \end{array}$$

Anmerk. Dieser Radius kann auch so berechnet werden, daß zuerst die Strecke, welche die Pfeilhöhe des Bogens zum Durchmesser ergänzt, — sie heiße x, — gesucht wird, indem $x \cdot CA = AB^2$, also $x = \frac{AB^2}{CA} = \frac{9^2}{3{,}5} = \frac{162}{7}$ ist. Alsdann ist $2CM = x + CA = \frac{162}{7} + 3{,}5 = \frac{373}{14}$ und $CM = \frac{373}{28} = 13{,}3214\ldots$

9. Ein Quadrat, dessen Seite $= 12$ Zoll ist, soll in ein reguläres 18-Eck von gleichem Flächeninhalt verwandelt [oder: es soll ein reguläres 18-Eck von einem Quadratfuß Flächeninhalt construirt] werden; wie lang ist die Seite dieser Figur? und wie lang der Radius des umschriebenen Kreises zu nehmen?

Es ist zweckmäßig, zuerst den Radius des umschriebenen Kreises zu berechnen; er heiße a. Nun ist der Winkel an der Spitze desjenigen gleichschenkligen Dreiecks, welches der achtzehnte Theil des regulären Achtzehnecks ist, $= \frac{360^0}{18} = 20^0$, die Hälfte desselben $= 10^0$, die halbe Basis dieses Dreiecks $c = a \,.\, sin\, 10^0$, die Höhe desselben $b = a \,.\, cos\, 10^0$, folglich sein Flächeninhalt $= a^2 \,.\, sin\, 10^0 \,.\, cos\, 10^0$, und der Flächeninhalt des regulären Achtzehnecks $= 18 \,.\, a^2 \,.\, sin\, 10^0 \,.\, cos\, 10^0 = 12^2 = 144$,

also $a = \sqrt{\frac{144}{18 \,.\, sin\, 10^0 \,.\, cos\, 10^0}} = \sqrt{\frac{8}{sin\, 10^0\; cos\, 10^0}}$

$$\begin{array}{rcl} log\, 8 &=& 0{,}9030900 \\ (+)\; log\,(sin\, 10^0 \,.\, cos\, 10^0) &=& 9{,}2330217 \\ \hline && 1{,}6700683 \;:\; 2 \\ log\, a &=& 0{,}8350341 = log\, 6{,}83965 \\ (+)\; log\, sin\, 10^0 &=& 9{,}2396702 \\ \hline log\, c &=& 0{,}0747043 = log\, 1{,}18769 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} log\, sin\, 10^0 &=& 9{,}2396702 \\ log\, cos\, 10^0 &=& 9{,}9933515 \\ \hline && 9{,}2330217 \end{array}$$

und die Seite des gesuchten regulären Achtzehnecks

$$2c = 2{,}37538.$$

Anmerk. Die Formel $18\, a^2 \,.\, sin\, 10^0\; cos\, 10^0$ hätte sich nach §. 11 Nr. 68 auch in $9\, a^2 \,.\, sin\, 20^0$ verwandeln lassen, wodurch die Berechnung von a noch vereinfacht wäre.

10. Wie groß ist der cubische Inhalt eines trichter- (kegel-) förmigen Kraters, dessen Rand einen Durchmesser $(2\,r)$ von 300 Metern hat und unter einem Winkel (B) von 32^0 gegen den Horizont einfällt?

Der cubische Inhalt eines Kegels, dessen Grundfläche den Radius r, und der die Höhe h hat, ist bekanntlich $= \frac{r^2 \,.\, \pi \,.\, h}{3}$. Im vorliegenden Falle ist $h = r \,.\, tg B$, also der gesuchte cubische Inhalt $= \frac{r^3 \,.\, \pi \,.\, tg\, B}{3}$.

$$\begin{array}{rcl} log\, r = log\, 150 &=& 2{,}1760913 \;(\times\; 3) \\ \hline log\, r^3 &=& 6{,}5282739 \\ (+)\; log\, \pi &=& 0{,}4971499 \\ (+)\; log\, tg\, B = log\, tg\, 32^0 &=& 9{,}7957892 \;(-\; 10) \\ \hline && 6{,}8212130 \\ (-)\; log\, 3 &=& 0{,}4771213 \\ \hline && 6{,}3440917 = log\, 2208471. \end{array}$$

Der gesuchte cubische Inhalt ist also ungefähr 2208000 Cubikmeter.

Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks berechnet sich bekanntlich — mit Beibehaltung der früheren Bezeichnung, Fig. 1 — nach der Formel $\frac{b \,.\, c}{2}$, der Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks, Fig. 10, nach der Formel $b \,.\, c$. Werden statt der Größen b und c andere Grundbestandtheile der Figur gegeben, von welchen jene abhängen, so sind statt ihrer nur die Ausdrücke, welche ihren Werth auf die gegebenen Grundbestandtheile zurückführen, in die Formel einzusetzen. Es bedarf dazu keiner besonderen Anleitung.

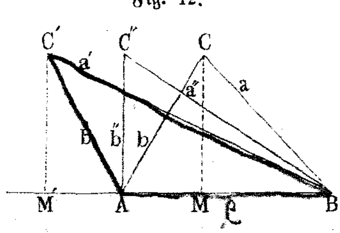
§. 10.

Erweiterung der Begriffe der Winkelfunctionen auf stumpfe, gerade und überstumpfe Winkel. — Functionen negativer Winkel.

Die Begriffe der Winkelfunctionen würden zwar auch schon in ihrer ursprünglichen Beschränkung auf spitze Winkel ausreichen, um den Zusammenhang unter den Grundbestandtheilen beliebiger Dreiecke bestimmen zu können, auch wenn dieselben einen stumpfen Winkel enthalten: die Formeln, welche diesen Zusammenhang darstellen, müßten jedoch in mehren Fällen verschieden werden, je nachdem der eine oder andere Winkel, der in ihnen vorkommt, ein spitzer oder ein stumpfer (oder auch ein rechter) ist. Die Formeln würden also bei jener Beschränkung nicht zu demjenigen Grade von Allgemeinheit erhoben werden können, welchen arithmetische Bestimmungen immer erstreben, daß nämlich eine und dieselbe Formel alle möglichen Voraussetzungen derselben Art umfaßt, und Aenderungen, welche durch verschiedene Voraussetzungen nöthig gemacht werden, nur als durch diese selbst gebotene Modificationen erscheinen.

Wenn z. B. im Dreieck ABC, Fig. 12, dessen Winkel sämmtlich spitze sind, ein Loth CM von C auf die gegenüberliegende Seite gefällt wird, so erscheint das Dreieck als die Summe der beiden rechtwinkligen Dreiecke BCM und ACM, und die Seite AB oder C als Summe der beiden Abschnitte BM und AM. Wenn dagegen im Dreieck ABC', dessen Winkel bei A ein stumpfer ist, das entsprechende Loth $C'M'$ gefällt wird, so erscheint das gegebene Dreieck als die Differenz der beiden rechtwinkligen, $ABC' = BC'M' - AC'M'$, und die Seite AB als die Differenz der beiden Abschnitte, $AB = BM' - AM'$.

Fig. 12.



Sollte nun die Seite AB oder c durch die beiden anliegenden Winkel (A und B) und die beiden anderen Seiten a und b ausgedrückt werden, so erhielte man im ersten Falle:

$$AB = BM + AM$$
$$c = a \,.\, cos\, B + b \,.\, cos\, CAM,$$

im zweiten Falle:

$$AB = BM' - AM'$$
$$c = a' \,.\, cos\, B' - b' \,.\, cos\, C'AM',$$

und in dem zwischenliegenden dritten Falle, wenn der Winkel bei A ein rechter wäre:

$$AB = c = a'' \,.\, cos\, B \ (\mp 0).$$

Man hätte also für drei besondere Voraussetzungen auch drei besondere Formeln nöthig.

Es könnten aber alle drei Fälle unter der Formel

$$c = a \,.\, cos\, B + b \,.\, cos\, A$$

begriffen werden, wenn man im zweiten Falle, wo der Winkel A, $= C'AB$, ein stumpfer wird, statt seines Cosinus den Cosinus seines spitzen Nebenwinkels mit der Nebenbestimmung, daß derselbe negativ zu nehmen wäre ($cos\, C'AB = -\, cos\, C'AM'$), und im dritten Falle, wo der Winkel A, $= C''AB$, ein rechter wird, seinen Cosinus, wie es schon früher geschehen ist (§. 6, 26; $cos\, 90^0$) $= 0$ setzte.

In allen ähnlichen Fällen, wo der Cosinus eines Winkels zur Darstellung des Zusammenhanges unter den Grundbestandtheilen eines Dreiecks gebraucht wird, kann die Formel, welche für die Annahme entwickelt ist, daß jener Winkel ein spitzer sei, unverändert auch für die Annahmen beibehalten werden, daß dieser Winkel ein rechter oder stumpfer sei, sofern der Cosinus des rechten Winkels $= 0$, und als Cosinus des stumpfen Winkels der negative Cosinus seines spitzen Nebenwinkels gesetzt wird.

Wird dagegen zur Darstellung einer Größe der Sinus eines Winkels verlangt, so kann der Ausdruck, welcher unter der Voraussetzung gefunden ist, daß dieser Winkel ein spitzer sei, ohne Weiteres auch für die Fälle beibehalten werden, daß der Winkel ein rechter oder ein stumpfer wird, wenn als Sinus des rechten Winkels der früher (§. 6, 24) dafür gefundene Grenzwerth 1, und als Sinus des stumpfen Winkels der Sinus seines spitzen Nebenwinkels gesetzt wird.

Wenn z. B. im Dreieck ABC, Fig. 12, das Loth CM aus dem Winkel A ($= CAM$) und der Seite b bestimmt werden soll, so erhält man $CM = b \,.\, sin\, CAM$. In dem Dreieck ABC', in welchem der Winkel bei A ein stumpfer ist, erhält man ebenso $C'M' = b' \,.\, sin\, C'AM'$;

der Unterschied besteht lediglich darin, daß der Winkel $C'AM'$ nicht mehr der Winkel A des gegebenen Dreiecks selbst, sondern dessen Nebenwinkel ist. In dem rechtwinkligen Dreieck ABC'' endlich fällt das Loth CM mit der Seite b'' ($= C''A$) zusammen; man würde dem vorigen Ausdruck entsprechend haben $C''M'' = b''.\sin 90^0 = b''.1$. In allen drei Fällen dürfte man $CM = b.\sin A$ setzen, wenn man im zweiten Falle, wo der Winkel A ein stumpfer ist, als seinen Sinus den Sinus seines Nebenwinkels, und im dritten Falle, wo der Winkel A ein rechter ist, als Sinus desselben den Werth 1 gelten lassen wollte.

Um nun überhaupt nicht genöthigt zu sein, bei der Aufstellung von Formeln, welche den Zusammenhang unter den Grundbestandtheilen des Dreiecks ausdrücken sollen, immer die Fälle zu unterscheiden, daß der eine oder der andere der darin vorkommenden Winkel ein spitzer, stumpfer oder rechter sei, hat man die Begriffe der Winkelfunctionen auch auf stumpfe Winkel ausgedehnt und als Functionen des rechten Winkels die schon früher (§. 6) dafür gefundenen Grenzwerthe gelten lassen. — Man hält dabei die Vorstellung fest, daß aus einem beliebigen Punkte des einen Schenkels des Winkels ein Loth auf den anderen Schenkel, oder allgemeiner auf die Richtung dieses zweiten Schenkels, gefällt werde, und nennt das Verhältniß von je zwei dadurch begrenzten Strecken eine Function des Winkels.

Denkt man sich den Winkel durch Drehung seines einen Schenkels stetig wachsend, und während er vom spitzen durch den rechten zu einem stumpfen übergeht, stets von dem Endpunkte des gedrehten Schenkels ein Loth auf den ruhenden oder dessen Richtung herabgelassen; so ist, entsprechend den früheren Erklärungen,

das Verhältniß dieses Lothes zu dem gedrehten Schenkel der **Sinus** des Winkels,

das Verhältniß der durch jenes Loth auf dem ruhenden Schenkel begrenzten Strecke — vom Scheitelpunkte aus gerechnet — zu dem gedrehten Schenkel der **Cosinus** des Winkels,

und das Verhältniß jenes Lothes zu der eben beschriebenen Strecke die **Tangente** des Winkels.

Die umgekehrten Verhältnisse derselben Linien heißen in derselben Ordnung: Cosecante, Secante und Cotangente des Winkels.

Das vom Endpunkte des gedreheten Schenkels auf den ruhenden Schenkel herabgelassene Loth behält für alle Winkel zwischen 0^0 und 180^0

dieselbe Lage: es fällt immer von derselben Seite her auf den ruhenden Schenkel. Hinsichtlich der Lage, Richtung oder Beziehung dieses Lothes auf einen bestimmten Anfangspunkt ist also für alle diese Winkel kein Unterschied zu machen. — Der Sinus eines stumpfen Winkels ist danach in jeder Hinsicht, — auch in Hinsicht auf den Sinn oder die Richtung, in welcher die Zahl (das Verhältniß) zu denken ist, — dem Sinus seines spitzen Nebenwinkels gleich.

In Fig. 13 ist

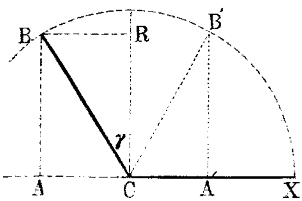
$$\sin BCX = \frac{BA}{BC} = \sin BCA.$$

Ist $B'CA' = BCA$, so ist auch $\sin BCA$, nämlich $\frac{BA}{BC}$, in nichts von $\sin B'CA'$, nämlich $\frac{B'A'}{B'C}$, zu unterscheiden. Es ist allgemein

35) $$\sin C = \sin(180^0 - C).$$

Die von dem bezeichneten Lothe auf dem ruhenden Schenkel begrenzte Strecke liegt dagegen für stumpfe Winkel in der entgegengesetzten Richtung wie für spitze Winkel. Das Loth BA trifft bei dem stumpfen Winkel BCX nicht mehr den ruhenden Schenkel BX selbst, wie bei dem spitzen Winkel $B'CA'$ das Loth $B'A'$, sondern die Verlängerung dieses Schenkels rückwärts über den Scheitelpunkt hinaus. Die Strecke CA ist also, weil sie der gegebenen Richtung CX gerade entgegengerichtet ist, den allgemeinen Begriffen widerstreitender Größen gemäß als negativ zu bezeichnen, wenn Strecken in der ursprünglichen Richtung, wie CA', als positiv angenommen werden. Das Verhältniß dieser Strecke zu dem gedrehten Schenkel $\frac{CA}{CB}$, allgemein der Cosinus eines stumpfen Winkels, ist also folgerichtig als eine negative Zahl zu bezeichnen. Uebrigens ist der Cosinus eines stumpfen Winkels der Größe nach dem Cosinus seines spitzen Nebenwinkels gleich.

Fig. 13.



Es ist also der Größe nach

$$\cos BCX = \frac{CA}{CB} = \cos BCA,$$

aber da CA in Beziehung auf die ursprünglich gegebene Richtung als negativ aufzufassen ist,

$$\cos BCX = -\cos BCA$$

und allgemein, unter C einen stumpfen Winkel verstanden,

$$\cos C = -\cos(180^0 - C). \qquad (36$$

Die Tangente eines stumpfen Winkels ist den vorigen Erörterungen zufolge gleichfalls negativ zu setzen, weil der Nenner dieses Verhältnisses negativ wird, während sein Zähler positiv bleibt, — übrigens der Größe nach der Tangente des spitzen Nebenwinkels gleich.

Unter C einen stumpfen Winkel verstanden, ist

$$tg\, C = -tg(180^0 - C). \qquad (37$$

Für die drei übrigen Functionen, als umgekehrte Werthe der bisher genannten, ergiebt sich aus dem Vorstehenden von selbst, daß, wieder unter C einen stumpfen Winkel verstanden,

$$cosec\, C = cosec(180^0 - C) \qquad (38$$
$$sec\, C = -sec(180^0 - C) \qquad (39$$
$$cot\, C = -cot(180^0 - C) \text{ ist.} \qquad (40$$

Ein stumpfer Winkel kann auch als Summe eines rechten und eines spitzen angesehen werden. Der Ueberschuß des stumpfen Winkels über einen rechten heiße γ, — in Fig. 13 z. B. ist $BCX = 90^0 + BCR$, also $BCR = \gamma$. —; so ist $C = 90^0 + \gamma$, also $180^0 - C = 90^0 - \gamma$, und nach bekannten Beziehungen

$$\sin(90^0 + \gamma) = \cos\gamma \quad [= \sin(90^0 - \gamma)] \qquad (41$$
$$\cos(90^0 + \gamma) = -\sin\gamma \quad [= -\cos(90^0 - \gamma)] \qquad (42$$

und $$tg(90^0 + \gamma) = -cot\,\gamma \quad [= -tg(90^0 - \gamma)]. \qquad (43$$

Die Aenderungen, welchen die Functionen eines Winkels unterworfen sind, der von 90° bis 180° wächst, sind aus den angegebenen Beziehungen der Functionen stumpfer zu denen ihrer spitzen Nebenwinkel ohne Weiteres abzuleiten. — Der Sinus eines solchen Winkels nimmt von 1 bis 0 wieder ab; der Cosinus desselben wächst von 0 durch alle negativen Werthe bis — 1, und die Tangente, unbegrenzt für den rechten Winkel, und um so größer, je weniger der Ueberschuß des Winkels über einen rechten beträgt, durchläuft von größeren zu kleineren Werthen übergehend alle möglichen negativen Werthe bis 0.

Für den geraden Winkel erhält man als Grenzwerthe

44) $$\sin 180^0 = 0$$

45) $$\cos 180^0 = -1$$

46) und $$tg\, 180^0 = 0.$$

Zum Zweck allgemeiner arithmetischer Darstellungen von Constructionen in der Ebene, bei welchen die Lage gerader Linien in allen möglichen Richtungen rund um einen Punkt auf dieselbe Anfangsrichtung bezogen werden soll, hat man die Begriffe der Winkelfunctionen auch auf überstumpfe Winkel (zwischen 180° und 360°) ausgedehnt.

Man geht dabei wieder von der Vorstellung aus, daß der eine Schenkel des Winkels als Anfangsrichtung festgehalten, der Winkel durch Drehung des anderen Schenkels erzeugt, und von einem beliebig gewählten Endpunkte des gedreheten Schenkels auf den ruhenden oder dessen Richtung ein Loth gefällt werde. In dieser Voraussetzung lassen sich die vorhin (S. 27) gegebenen Erklärungen der Winkelfunctionen ohne Weiteres auch auf überstumpfe Winkel übertragen.

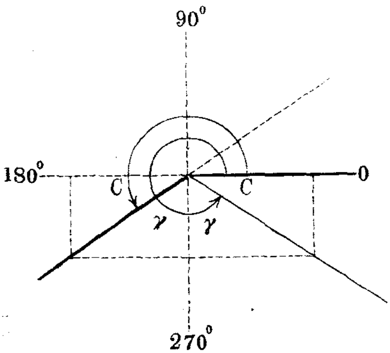
Nun ist aber bei der angegebenen Construction nicht bloß die Größe der dadurch begrenzten Strecken, sondern auch die Lage derselben von der Größe des Winkels abhängig. Außer dem Größenverhältniß dieser Strecken ist also auch der Gegensatz ihrer Lage bei Bestimmung der Function des Winkels zu berücksichtigen.

Die Strecke, deren Verhältniß zum gedreheten Schenkel als Cosinus des Winkels bezeichnet wird, geht schon für stumpfe Winkel in die entgegengesetzte Lage wie für spitze Winkel über. Sie wird daher, und in Folge davon auch der Cosinus des stumpfen Winkels als negativ bezeichnet. In derselben Lage (rückwärts vom Scheitelpunkte) bleibt diese Strecke auch für alle Winkel innerhalb des dritten Quadranten, zwischen 180° und 270°. Die Cosinus dieser Winkel sind folglich ebenfalls als negative Zahlen anzusetzen. Für den Winkel von 270° (= 3 rechten) verschwindet jene Strecke wieder zu einem Punkte, wie für den rechten Winkel, und erst für größere Winkel, im vierten Quadranten, zwischen 270° und 360°, kehrt sie in die ursprüngliche, positive Lage zurück. Es ist also $\cos 270^0 = 0$, und die Cosinus aller Winkel im vierten Quadranten sind wieder positiv, wie die der spitzen Winkel.

Das Loth, dessen Verhältniß zum gedreheten Schenkel Sinus des Winkels genannt wird, behält dieselbe Lage für alle Winkel im ersten und zweiten Quadranten, zwischen 0° und 180°. Sobald aber der Winkel über zwei rechte, 180°, hinausgeht, kommt es in die umgekehrte Lage, auf die entgegengesetzte Seite des ersten ruhenden Schenkels, und bleibt in dieser Lage für alle überstumpfen Winkel im dritten und vierten Quadranten, von 180° bis 360°. In dieser Lage muß es also den Begriffen widerstreitender Größen entsprechend, als der ursprünglichen Richtung entgegengerichtet, negativ gesetzt werden, und in Folge davon sind die Sinus aller überstumpfen Winkel zwischen 180° und 360° negativ.

Die Tangente des Winkels, als das Verhältniß des eben genannten Lothes zu dem von ihm begrenzten Abschnitte des ruhenden Schenkels, — positiv für spitze, negativ für stumpfe Winkel, — muß, den vorstehenden Bestimmungen gemäß, für überstumpfe Winkel innerhalb des dritten Quadranten wieder positiv werden, weil sie das Verhältniß zweier negativen Größen zu einander angiebt, für überstumpfe Winkel innerhalb des vierten Quadranten aber wieder negativ, weil für diese bloß ihr Zähler negativ, ihr Nenner hingegen positiv ist.

Fig. 14.



Was nun die Größe der Functionen überstumpfer Winkel anbetrifft, so ist dieselbe leicht auf den Werth der Functionen gewisser spitzer Winkel zurückzuführen, welche in einfachen Beziehungen zu den überstumpfen stehen.

Wenn unter C und γ spitze Winkel verstanden werden, so lassen sich die Winkel im dritten Quadranten unter der Form

$$180^0 + C \text{ oder } 270^0 - \gamma,$$

und die Winkel im vierten Quadranten unter der Form

$$270^0 + \gamma \text{ oder } 360^0 - C$$

darstellen. — Ein Blick auf die nebenstehende Fig. 14 wird aber hinreichen, um die Richtigkeit nachfolgender Formeln zu rechtfertigen:

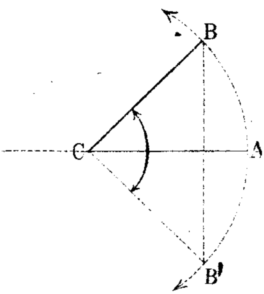
47) $\sin(180^0 + C) = -\sin C;\quad \sin(270^0 - \gamma) = -\cos\gamma$
48) $\cos(180^0 + C) = -\cos C;\quad \cos(270^0 - \gamma) = -\sin\gamma$
49) $tg(180^0 + C) = tg\,C;\quad tg(270^0 - \gamma) = \cot\gamma$
50) $\sin(270^0 + \gamma) = -\cos\gamma;\quad \sin(360^0 - C) = -\sin C$
51) $\cos(270^0 + \gamma) = \sin\gamma;\quad \cos(360^0 - C) = \cos C$
52) $tg(270^0 + \gamma) = -\cot\gamma;\quad tg(360^0 - C) = -tg\,C.$

Ferner ist

53) $\sin 270^0 = -1$
54) $\cos 270^0 = 0$
55) $tg\,270^0 = (\mp)\infty$
56) $\sin 360^0 = 0 = \sin 0^0$
57) $\cos 360^0 = +1 = \cos 0^0$
58) $tg\,360^0 = 0 = tg\,0^0.$

Zur Verallgemeinerung solcher arithmetischer Darstellungen, in welche Winkel und Winkelfunctionen eingehen, ist es auch gestattet und zweckmäßig, die Begriffe des Gegensatzes oder Widerstreits unter Größen auch auf Winkel anzuwenden. Winkel, welche durch Drehung nach der einen oder anderen Seite von einer anfänglichen Richtung aus oder durch Drehungen im entgegengesetzten Sinne erzeugt werden, können als einander widerstreitende Größen angesehen und als positive und negative unterschieden werden. Wenn z. B. in Fig. 15 die Richtung CA als anfängliche, und der Winkel BCA, welcher durch eine Drehung nach links herum erzeugt ist, als positiv, $+C$, angenommen wird, so muß der Winkel $B'CA$, welcher durch die entgegengesetzte Drehung nach rechts herum entsteht, als negativ, $-C$, bezeichnet werden.

Fig. 15.



Berücksichtigt man nun zugleich den Gegensatz der Lage derjenigen Linien, welche zur Bestimmung der Winkelfunctionen dienen, so ist ohne Weiteres klar, daß für jede Größe des Winkels

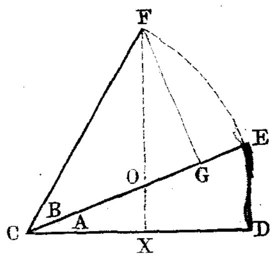
59) $\sin(-C) = -\sin C\quad [= \sin(360^0 - C)]$
60) $\cos(-C) = \cos C\quad [= \cos(360^0 - C)]$
61) und $tg(-C) = -tg\,C\quad [= tg(360^0 - C)]$ ist.

§. 11.

Functionen der Summe und Differenz zweier Winkel. — Formeln der sogenannten analytischen Goniometrie.

Für die Berechnung der Winkelfunctionen und für verschiedene trigonometrische Rechnungen sind die Beziehungen von Wichtigkeit, welche unter den Functionen einzelner Winkel und den Functionen der Summen oder Differenzen, der Vielfachen oder aliquoter Theile dieser Winkel u. s. w. stattfinden. Die zahlreichen Formeln, welche solche Beziehungen darstellen, lassen sich am leichtesten aus denjenigen Formeln herleiten, welche den Sinus und den Cosinus der Summe zweier Winkel aus dem Sinus und Cosinus der einzelnen Winkel zu finden lehren.

Fig. 16.



Es seien Fig. 16 die Winkel A ($= ECD$) und B ($= FCE$) zwei beliebige spitze Winkel, deren Summe $A + B$ ($= FCD$) selbst wieder noch ein spitzer Winkel ist. Die Sinus und Cosinus der Winkel A und B werden als bekannt angenommen, und es wird der Sinus und der Cosinus ihrer Summe gesucht. Wenn also ED lothrecht auf CD, FG lothrecht auf CE und FX lothrecht auf CD gezogen ist, so sind bekannt:

$$\frac{ED}{CE} = \sin A, \qquad \frac{CD}{CE} = \cos A$$

$$\frac{FG}{CF} = \sin B \quad \text{und} \quad \frac{CG}{CF} = \cos B,$$

und es werden gesucht:

$$\frac{FX}{CF} = \sin(A + B) \quad \text{und} \quad \frac{CX}{CF} = \cos(A + B).$$

Nun ist aber $FX = FO + OX$, und da die Dreiecke FGO, CXO und CDE einander ähnlich sind,

$$\frac{FO}{FG} = \frac{CE}{CD}, \quad \text{mithin} \quad FO = \frac{FG \cdot CE}{CD}$$

und $\frac{OX}{CO} = \frac{ED}{CE}$, mithin $OX = \frac{ED.CO}{CE}$;

ferner $CO = CG - GO$, und

$$\frac{GO}{FG} = \frac{ED}{CD}, \text{ mithin } GO = \frac{ED.FG}{CD}$$

und $CO = CG - \frac{ED.FG}{CD}$.

Nach Einführung dieser Werthe erhält man

$$FX = \frac{FG.CE}{CD} + \frac{ED.CG}{CE} - \frac{ED^2.FG}{CE.CD} = \frac{ED.CG}{CE} + \frac{FG(CE^2 - ED^2)}{CD.CE}$$

und weil $CE^2 - ED^2 = CD^2$,

$$\frac{FX}{CF} = \frac{ED.CG}{CE.CF} + \frac{CD.FG}{CE.CD}, \text{ d. i.}$$

62) $$\sin(A + B) = \sin A . \cos B + \cos A . \sin B.$$

Da ferner $\frac{CX}{CO} = \frac{CD}{CE}$, also

$$CX = \frac{CD}{CE}.CO = \frac{CD.CG}{CE} - \frac{ED.FG}{CE}$$

ist, so erhält man

$$\frac{CX}{CF} = \frac{CD.CG}{CE.CF} - \frac{ED.FG}{CE.CF}, \text{ d. i.}$$

63) $$\cos(A + B) = \cos A . \cos B - \sin A . \sin B.$$

Anmerk. Die Ableitung dieser Formeln läßt sich im Ausdrucke vereinfachen, wenn man, was ohne Weiteres erlaubt ist, $CE = CF = 1$ setzt.

Aus den beiden vorstehenden Formeln läßt sich eine große Reihe anderer für die Goniometrie und Trigonometrie wichtiger Formeln ableiten. Die abgeleiteten Formeln haben in demselben Umfange Gültigkeit, wie die ihnen zum Grunde liegenden. Es ist daher bemerkenswerth, daß die vorstehenden Formeln, obwohl zunächst nur für die Voraussetzung entwickelt, daß sowohl der Winkel A als B ein spitzer, und auch ihre Summe noch ein spitzer Winkel sei, doch für Winkel jeder Größe gültig bleiben. Für unsere Zwecke genügt es nachzuweisen, daß diese Formeln für alle Winkel gelten, deren Summe nicht über zwei rechte (180°) hinausgeht. In dieser Beschränkung ist noch zu zeigen, daß die Formeln gültig bleiben auch in dem Falle, wenn die beiden Winkel A und B zusammen einen rechten betragen, oder wenn beide spitze Winkel zusammen einen stumpfen Winkel ausmachen, oder wenn der eine von ihnen selbst schon ein rechter oder ein stumpfer ist, und ihre Summe weniger als zwei rechte oder gerade zwei rechte beträgt.

Ist nun $A + B = 90^0$, so wird (nach 14) $\cos B = \sin A$ und $\sin B = \cos A$, und man erhält nach Einführung dieser Werthe in die vorigen Formeln

$$\sin(A + B) = \sin 90^0 = \sin A^2 + \cos A^2 = 1$$

und

$$\cos(A + B) = \cos 90^0 = \cos A \,.\, \sin A - \sin A \,.\, \cos A = 0,$$

wie es sein muß (24 und 26).

Sind ferner A und B spitze Winkel, deren Summe $A + B > 90^0$ ist, so sind ihre Ergänzungswinkel zu einem rechten $90^0 - A = \alpha$ und $90^0 - B = \beta$ ebenfalls spitze Winkel, deren Summe aber

$$\alpha + \beta = (90^0 - A) + (90^0 - B) = 180^0 - (A + B) < 90^0 \text{ ist.}$$

Nun gelten aber für die Summe $\alpha + \beta$ die obigen Formeln, und indem man in dieselben statt der Functionen von α und β die ihnen gleichen Functionen der Ergänzungswinkel A und B einführt, erhält man

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \,.\, \cos\beta + \cos\alpha \,.\, \sin\beta$$
$$\sin[180^0 - (A + B)] = \cos A \,.\, \sin B + \sin A \,.\, \cos B = \sin(A + B)$$

und

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta - \sin\alpha \,.\, \sin\beta$$
$$\cos[180^0 - (A + B)] = \sin A \,.\, \sin B - \cos A \,.\, \cos B = -\cos(A + B)$$

also

$$\sin(A + B) = \sin[180^0 - (A + B)]$$

und

$$\cos(A + B) = -\cos[180^0 - (A + B)],$$

wie es nach 35) und 36) sein soll.

Ist der eine der beiden Winkel, etwa A, ein rechter, der andere, B, ein spitzer, so giebt die unmittelbare Einführung der Werthe $\sin A = \sin 90^0 = 1$ und $\cos A = \cos 90^0 = 0$ in die Grundformeln

$$\sin(90^0 + B) = 1 \,.\, \cos B + 0 \,.\, \sin B = \cos B$$

und

$$\cos(90^0 + B) = 0 \,.\, \cos B - 1 \,.\, \sin B = -\sin B,$$

wie es nach 41) und 42) verlangt wird.

Es sei ferner der eine der beiden Winkel, etwa A, ein stumpfer, der andere, B, ein spitzer, und die Summe von beiden noch kleiner als zwei rechte. Alsdann läßt sich der stumpfe Winkel $A = 90^0 + \mathrm{a}$ setzen, unter a einen spitzen Winkel verstanden, wodurch [nach 41) und 42)]

$$\sin A = \sin(90^0 + \mathrm{a}) = \cos\mathrm{a}$$

und

$$\cos A = \cos(90^0 + \mathrm{a}) = -\sin\mathrm{a}$$

wird, und wenn diese Werthe in die Grundformeln eingeführt werden, erhält man

$$\sin(A + B) = \sin[(90^0 + \mathrm{a}) + B] = \cos\mathrm{a} \,.\, \cos B - \sin\mathrm{a} \,.\, \sin B$$
$$= \cos(\mathrm{a} + B)$$

und

$$\cos(A + B) = \cos[(90^0 + \mathrm{a}) + B] = -\sin\mathrm{a} \,.\, \cos B - \cos\mathrm{a} \,.\, \sin B$$
$$= -\sin(\mathrm{a} + B).$$

Da nun $\mathrm{a} + B$ der Ueberschuß der Summe $A + B$ über einen rechten $(= A + B - 90^0)$ ist, oder den Nebenwinkel dieser Summe $[180^0 - (A + B)]$ zu einem rechten ergänzt, mithin

$$\cos(\mathrm{a} + B) = \sin[180^0 - (A + B)]$$

und

$$\sin(\mathrm{a} + B) = \cos[180^0 - (A + B)]$$

ist, so ergeben die obigen Formeln in der vorliegenden Voraussetzung

$$\sin(A + B) = \cos(\mathrm{a} + B) = \sin[180^0 - (A + B)]$$

und

$$\cos(A + B) = -\sin(\mathrm{a} + B) = -\cos[180^0 - (A + B)]$$

wie es früheren Bestimmungen gemäß ist.

3*

Wenn endlich die beiden Winkel A und B zusammen zwei rechte ausmachen, $A + B = 180^0$ (gleichviel ob jeder ein rechter, oder der eine ein stumpfer und der andere sein spitzer Nebenwinkel ist), so ist $sin\,A = sin\,B$ und $cos\,A = -\,cos\,B$, und die Grundformeln ergeben, wenn in ihnen die letzten Werthe statt der ersten gesetzt werden,

$$sin\,(A + B) = sin\,180^0 = sin\,B\,.\,cos\,B - cos\,B\,.\,sin\,B = 0$$

und $$cos\,(A + B) = cos\,180^0 = -\,cos\,B^2 - sin\,B^2 = -\,1$$

wie es nach 44) und 45) verlangt wird.

Die obigen Formeln 62) und 63) sind also als richtig nachgewiesen für je zwei Winkel, deren Summe nicht über zwei rechte hinausgeht [1]). Innerhalb dieser Grenze, und sofern in der Folge Differenzen von Winkeln eintreten, für alle hohlen Winkel gelten daher auch die aus ihnen abgeleiteten Formeln.

Um zunächst den Sinus und Cosinus der Differenz zweier Winkel auf Functionen dieser Winkel selbst zurückzuführen, setze man in den obigen Formeln $A + B = C$ und $A = C - B$, wodurch sie in

$$sin\,C = sin\,(C - B)\,.\,cos\,B + cos\,(C - B)\,.\,sin\,B$$

und $$cos\,C = cos\,(C - B)\,.\,cos\,B - sin\,(C - B)\,.\,sin\,B$$

übergehen, und eliminire aus beiden Gleichungen nach bekannten algebraischen Regeln (am bequemsten durch die Methode der Addition oder Subtraction) einmal $cos\,(C - B)$, das andere Mal $sin\,(C - B)$. Man erhält dadurch

$$sin\,C\,.\,cos\,B - cos\,C\,.\,sin\,B = sin\,(C - B)\,.\,[cos\,B^2 + sin\,B^2]$$

und $$cos\,C\,.\,cos\,B + sin\,C\,.\,sin\,B = cos\,(C - B)\,.\,[cos\,B^2 + sin\,B^2]$$

oder indem man der äußeren Uebereinstimmung wegen wieder A statt C schreibt:

64) $$\mathbf{sin\,(A - B) = sin\,A\,.\,cos\,B - cos\,A\,.\,sin\,B}$$

65) und $$\mathbf{cos\,(A - B) = cos\,A\,.\,cos\,B + sin\,A\,.\,sin\,B}$$

Wird Gleichung 62) durch 63), und 64) durch 65), und darauf Zähler und Nenner der zweiten Seite noch durch $cos\,A\,.\,cos\,B$ dividirt, so erhält man

66) $$\mathbf{tg\,(A + B) = \frac{tg\,A + tg\,B}{1 - tg\,A\,.\,tg\,B}}$$

67) und $$\mathbf{tg\,(A - B) = \frac{tg\,A - tg\,B}{1 + tg\,A\,.\,tg\,B}}$$

---

[1]) Ihre Richtigkeit bewährt sich überhaupt, wie schon gesagt, für je zwei Winkel von beliebiger Größe.

Wird in den Formeln 62), 63) und 66) $B = A$ gesetzt, so erhält man: oder, wenn $\frac{A}{2}$ statt A gesetzt wird:

$$\sin 2A = 2 \sin A \,.\, \cos A \qquad \sin A = 2 \sin\frac{A}{2} \,.\, \cos\frac{A}{2} \tag{68}$$

$$\cos 2A = \cos A^2 - \sin A^2 \qquad \cos A = \left(\cos\frac{A}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{A}{2}\right)^2 \tag{69}$$

$$= 1 - 2 \sin A^2 \qquad = 1 - 2\left(\sin\frac{A}{2}\right)^2$$

$$= 2 \cos A^2 - 1 \qquad = 2\left(\cos\frac{A}{2}\right)^2 - 1$$

und $$tg\, 2A = \frac{2\, tg\, A}{1 - tg\, A^2} \qquad tg\, A = \frac{2\, tg\frac{A}{2}}{1 - \left(tg\frac{A}{2}\right)^2}. \tag{70}$$

Aus den Formeln 69) ergiebt sich ferner durch Umkehrung

$$\sin A = \sqrt{\frac{1 - \cos 2A}{2}} \quad \text{oder} \quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \tag{71}$$

$$\left[2 \sin A^2 = 1 - \cos 2A \quad \text{oder}\; 2\left(\sin\frac{A}{2}\right)^2 = 1 - \cos A\right]$$

$$\cos A = \sqrt{\frac{1 + \cos 2A}{2}} \quad \text{oder} \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \tag{72}$$

$$\left[2 \cos A^2 = 1 + \cos 2A \quad \text{oder}\; 2\left(\cos\frac{A}{2}\right)^2 = 1 + \cos A\right]$$

und indem 68) durch 69) dividirt wird:

$$tg\, A = \sqrt{\frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A}} \quad \text{oder} \quad tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} \tag{73}$$

Wenn man in 62) und 63) $2A$ statt A, und A statt B, und in den entwickelten Formen die in 68) und 69) für $\sin 2A$ und $\cos 2A$ gefundenen Werthe setzt, so findet man

$$\sin 3A = 3 \sin A \,.\, \cos A^2 - \sin A^3 = 3 \sin A - 4 \sin A^3 \tag{74}$$
$$\cos 3A = \cos A^3 - 3 \cos A \,.\, \sin A^2 = 4 \cos A^3 - 3 \cos A. \tag{75}$$

Anmerk. In ähnlicher Weise ließen sich Formeln entwickeln, welche $\sin 4A$ und $\cos 4A$, überhaupt den Sinus und Cosinus höherer Vielfacher eines Winkels auf den Sinus und Cosinus des einfachen Winkels zurückführten. Die Trigonometrie hat jedoch kein weiteres Interesse an diesen Formeln, und die Analysis bietet einfachere und allgemeinere Mittel zu ihrer Ableitung dar.

Eine neue Reihe von Formeln entsteht dadurch, daß man die ersten vier dieses Paragraphen [Nr. 62) bis 65)] zu je zwei durch Addition oder Subtraction verbindet.

Durch Addition von 62) und 64) entsteht:

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cdot \cos B,$$

oder indem man A statt $(A+B)$ und B statt $(A-B)$, mithin dem entsprechend $\frac{A+B}{2}$ statt A und $\frac{A-B}{2}$ statt B setzt:

76) $$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}.$$

Wird 64) von 62) subtrahirt, so entsteht:

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \cdot \sin B,$$

oder durch die eben angegebene Verwechslung der Zeichen:

77) $$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2} \cdot \sin\frac{A-B}{2}.$$

Wenn ferner 63) und 65) addirt werden, so entsteht:

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cdot \cos B, \text{ oder}$$

78) $$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2},$$

und wenn 65) von 63) subtrahirt wird:

$$\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2\sin A \cdot \sin B, \text{ oder}$$

79) $$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2} \cdot \sin\frac{A-B}{2}.$$

Aus den vorstehenden Formeln 76) bis 79) werden ferner wieder abgeleitet,

wenn 77) durch 76) dividirt wird:

80) $$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{tg\,\frac{A-B}{2}}{tg\,\frac{A+B}{2}},$$

wenn 79) durch 78) dividirt wird:

81) $$\frac{\cos A - \cos B}{\cos A + \cos B} = -\,tg\,\frac{A-B}{2} \cdot tg\,\frac{A+B}{2},$$

wenn 76) durch 78) dividirt wird:

82) $$\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = tg\,\frac{A+B}{2},$$

wenn 77) durch 78) dividirt wird:

$$\frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} = tg\,\frac{A - B}{2}, \tag{83}$$

wenn 76) durch 79) dividirt wird:

$$\frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B} = -\cot\frac{A - B}{2}, \tag{84}$$

und wenn 77) durch 79) dividirt wird:

$$\frac{\sin A - \sin B}{\cos A - \cos B} = -\cot\frac{A + B}{2}. \tag{85}$$

Werden ferner die Formeln 62) und 64) durch $\cos A . \cos B$ dividirt, so erhält man:

$$tg\,A + tg\,B = \frac{\sin(A + B)}{\cos A . \cos B} \tag{86}$$

und

$$tg\,A - tg\,B = \frac{\sin(A - B)}{\cos A . \cos B}, \tag{87}$$

und wenn dieselben durch $\sin A . \sin B$ dividirt werden:

$$\cot A + \cot B = \frac{\sin(A + B)}{\sin A . \sin B} \tag{88}$$

und

$$\cot A - \cot B = \frac{\sin(A - B)}{\sin A . \sin B}. \tag{89}$$

Daraus folgt wieder, indem 87) durch 86), oder 89) durch 88) dividirt wird:

$$\frac{tg\,A - tg\,B}{tg\,A + tg\,B} = \frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{\cot A - \cot B}{\cot A + \cot B}. \tag{90}$$

Eine andere Klasse von Formeln läßt sich aus den vorstehenden auch noch dadurch ableiten, daß man in ihnen statt des einen oder anderen Winkels solche Winkel von bestimmter Größe (wie z. B. 45⁰, 30⁰, 60⁰, 90⁰ und dergl.) setzt, deren Functionen einfache Werthe haben. Beispielsweise mag hervorgehoben werden, wie die Formeln 66) und 67), wenn in ihnen $A = 45^0$ gesetzt wird, übergehen in

$$tg\,(45^0 + B) = \frac{1 + tg\,B}{1 - tg\,B} = \cot(45^0 - B) \tag{91}$$

oder

$$tg\,(45^0 - B) = \frac{1 - tg\,B}{1 + tg\,B} = \cot(45^0 + B).$$

Es ist indessen ebensowenig ein Bedürfniß vorhanden als schwierig, die vorstehenden Formeln auf diese oder andere Weise, etwa durch fernere Combinationen unter sich, noch weiter zu vermehren.

§. 12.

Die drei Grundgleichungen für den Zusammenhang der Grundbestandtheile beliebiger Dreiecke.

Durch die bisherigen Erörterungen ist die Hauptaufgabe der Trigonometrie genügend vorbereitet, nämlich die Aufgabe (§. 1), die Gesetze des Zusammenhangs unter den Grundbestandtheilen jedes beliebigen Dreiecks arithmetisch darzustellen.

Durch je drei Grundbestandtheile des Dreiecks, unter denen mindestens eine Seite ist, werden, bis auf eine bekannte Beschränkung, die übrigen, also jeder vierte Grundbestandtheil der Figur bestimmt. Es ist daher nöthig, den arithmetischen Zusammenhang zwischen je vier Grundbestandtheilen des Dreiecks anzugeben, um jeden derselben als den gesuchten aus den drei übrigen berechnen zu können. Der Fall, daß drei Winkel und eine Seite in Verbindung gebracht werden sollten, kommt hierbei nicht in Betracht, weil durch zwei Winkel auch ohne Hinzukommen einer Seite der dritte Winkel des Dreiecks schon bestimmt wird, durch drei Winkel allein aber keine der Seiten. Es bleiben daher nur noch die Fälle übrig, daß zwei Winkel und zwei Seiten, oder daß ein Winkel und drei Seiten in Verbindung zu bringen sind. In dem ersten Falle ist aber noch der Unterschied zu berücksichtigen, daß entweder die beiden Seiten den Winkeln gegenüberliegen, oder daß sie den einen derselben einschließen. In dem zweiten Falle dagegen ist kein Unterschied nach der Lage der vier genannten Grundbestandtheile zu machen. Es ist demnach der Zusammenhang aufzusuchen

1. zwischen zwei Winkeln und den ihnen gegenüberliegenden Seiten,
2. zwischen zwei Winkeln und zwei den einen derselben einschließenden Seiten, und
3. zwischen einem Winkel und den drei Seiten des Dreiecks.

Zur Ableitung der Gleichungen, welche diesen Zusammenhang darstellen, wählen wir ein Dreieck mit lauter spitzen Winkeln. Die Abänderungen, welche für die Annahme nöthig werden, daß der eine oder andere dieser Winkel ein stumpfer oder rechter sei, ergeben sich alsdann aus den früheren Bestimmungen über die Functionen solcher Winkel.

I. In dem Dreieck ABC, Fig. 17, werde also zuerst der Zusammenhang zwischen zwei Winkeln, A und B, und den ihnen gegenüberliegenden Seiten, a und b, gesucht. Aus leicht begreif-

Fig. 17.

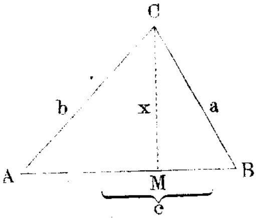
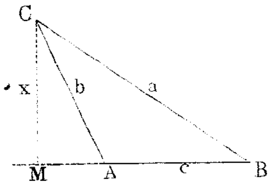


Fig. 18.



lichen Gründen zerlegt man zu dem Ende das Dreieck durch ein Loth aus der Spitze des dritten Winkels auf die gegenüberliegende Seite, CM, in zwei rechtwinklige Dreiecke. Das beiden gemeinschaftliche Loth CM oder x läßt sich alsdann aus den in Frage kommenden Stücken bestimmen, wie folgt:

$$\frac{x}{b} = \sin A \qquad \text{und} \qquad \frac{x}{a} = \sin B,$$

mithin $\quad x = b \, . \sin A \quad$ und $\quad x = a \, . \sin B,$

und durch Gleichsetzung der beiden Werthe für x erhält man nun

$$\boldsymbol{b \, . \sin A = a \, . \sin B} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{a : b = \sin A : \sin B}. \qquad (92$$

In der letzteren Form drückt die Gleichung den oft gebrauchten Satz aus, daß je zwei Seiten eines Dreiecks sich zu einander verhalten, wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

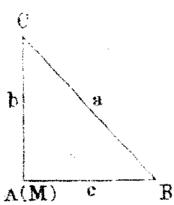
Ist einer der beiden Winkel, z. B. A, ein stumpfer, wie in Fig. 18, so ändert sich in den angegebenen Beziehungen weiter nichts, als daß an die Stelle seines Sinus ($\sin CAB = \sin A$) der Sinus seines Nebenwinkels

$$[\sin CAM = \sin(180^0 - A)]$$

tritt. Es ist aber bekanntlich nach 35)

$$\sin A = \sin(180^0 - A).$$

Fig. 19.



Ist jener Winkel ein rechter, $A = 90^0$, wie in Fig. 19, so fällt das Loth CM oder x mit der ihm anliegenden Seite CA oder b zusammen.

Man erhält aber auch sofort aus der obigen Gleichung, indem man $\sin A = \sin 90^0 = 1$ setzt, $b = a . \sin B$, wie es sein muß.

II. Um zweitens den Zusammenhang zwischen zwei Winkeln und zwei den einen derselben einschließenden Seiten darzustellen, wählen wir dazu im Dreieck ABC, Fig. 17, die Winkel A und B und die Seiten b und c $(= AB)$. Es ist sodann $x = b . \sin A$ und $x = BM . tg\, B$. Die Strecke BM aber ist $= c - AM = c - b . \cos A$. Durch Einführung dieses Werthes für BM und Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für x erhält man folglich:

93) $$b . \sin A = (c - b . \cos A) . tg\, B \text{ [1]}.$$

Wird der Winkel A, der hier als spitzer angenommen ist, ein stumpfer, wie in Fig. 18, so ist die Strecke BM nicht mehr $= c - AM$, sondern $= c + AM$, und AM berechnet sich vermittelst des Cosinus des Nebenwinkels von A als $b . \cos CAM$. Indem aber für diese Voraussetzung $\cos A$ ohne Weiteres nach 36) in $-\cos(180^0 - A) = -\cos CAM$ übergeht, verwandelt sich unsere Gleichung bei der Annahme, daß A ein stumpfer Winkel ist, sofort in

$$b . \sin A = (c + b \cos A) . tg\, B.$$

Wird A ein rechter Winkel, wie in Fig. 19, so verschwindet die Strecke AM zu einem Punkte, und BM wird $= c$. Indem aber für diese Voraussetzung nach 24) $\sin A = 1$, und nach 26) $\cos A = 0$ zu setzen ist, geht die Gleichung freiwillig in $b = c . tg\, B$ über, wie es sein soll.

Der Winkel B ist bisher als spitzer Winkel angenommen. So lange dieses der Fall ist, ist c größer als AM oder $b . \cos A$, mithin $c - b . \cos A$ ein positiver Werth, und eben deßhalb auch $tg\, B = \dfrac{b . \sin A}{c - b . \cos A}$ ein positiver Werth.

---

[1]) Die obige Gleichung läßt sich auch auf folgende Weise ableiten. Nach der in 92) angegebenen Beziehung ist auch

$$b . \sin C = c . \sin B,$$

ferner weil $C = 180^0 - (A + B)$ ist, $\sin C = \sin[180^0 - (A + B)] = \sin(A + B)$ und nach 62) $= \sin A . \cos B + \cos A . \sin B$. Durch Einführung dieses Werthes für $\sin C$ erhält man

$$b . \sin A . \cos B + b . \cos A . \sin B = c . \sin B,$$

wenn sodann die ganze Gleichung durch $\cos B$ dividirt wird,

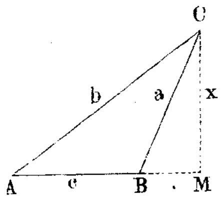
$$b . \sin A + b . \cos A . tg\, B = c . tg\, B,$$

und daraus

$$b . \sin A = (c - b . \cos A) . tg\, B.$$

Wäre aber B ein stumpfer Winkel, wie in Fig. 20, so würde die Strecke $BM = C - AM = c - b.\cos A$ ein negativer Werth, weil nun AM oder $b.\cos A$ größer als c wäre. Es würde folglich auch

Fig. 20.



$$tg\,B = \frac{b\,\sin A}{c - b\,\cos A} = \frac{b\,\sin A}{-(b\,\cos A - c)}$$

wegen des negativen Nenners selbst negativ und der Größe nach mit der Tangente des Nebenwinkels von B, nämlich CBM übereinstimmend, $tg\,B = -tg\,CBM$, wie es nach 37) sein muß.

Wäre endlich B ein rechter Winkel, so fiele das Loth CM mit CB oder a zusammen, die Strecke AM oder $b.\cos A$ würde $= c$, also $c - b.\cos A = 0$ und $tg\,B = \frac{b.\sin A}{0} = \infty$, wie es nach 28) sein soll.

III. Um schließlich den Zusammenhang zwischen den drei Seiten und einem Winkel des Dreiecks aufzusuchen, werde in Fig. 17 der Winkel A als derjenige angesehen, der in die Verbindung eintreten soll. Nun ist nach dem Pythagoräischen Lehrsatze

$$x^2 = a^2 - BM^2 = b^2 - AM^2,$$

und da $BM = c - AM$ ist,

$$a^2 - (c - AM)^2 = b^2 - AM^2,$$

also $a^2 - c^2 + 2c.AM = b^2$, und weil $AM = b.\cos A$ ist,

$$a^2 - c^2 + 2c.b.\cos A = b^2$$

oder in der gewöhnlichen Anordnung der Glieder:

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A.} \qquad (94$$

Ist der Winkel A ein stumpfer, wie in Fig. 18, so ist die Strecke BM nicht mehr, wie vorhin, $= c - AM$, sondern $= c + AM$. Alles Uebrige in der vorigen Ableitung bleibt unverändert. Die Einführung des Werthes $c + AM$ an der Stelle von $c - AM$ hat aber nur zur Folge, daß in der abgeleiteten Gleichung das Glied $2bc.\cos A$ das entgegengesetzte Vorzeichen bekommt, und statt des Cosinus des stumpfen Winkels CAB oder A der Cosinus seines spitzen Nebenwinkels CAM an die Stelle tritt. Dasselbe geschieht aber auch dadurch, wenn in der Gleichung 94) nach 36) $\cos A$, falls A ein stumpfer Winkel ist, $= -\cos(180^0 - A)$ gesetzt wird.

Ist A ein rechter Winkel, wie in Fig. 19, so wird die Strecke

$AM = 0$, ein Punkt, und man erhält $a^2 = b^2 + c^2$, den Pythagoräischen Lehrsatz. Dasselbe geschieht, indem für diese Voraussetzung nach 26) $\cos A = \cos 90^0 = 0$ gesetzt wird.

Die drei in diesem Paragraphen entwickelten Gleichungen 92), 93) und 94) sind die Grundgleichungen der Trigonometrie. Sie stellen den Zusammenhang zwischen je drei willkürlichen und einem vierten von ihnen abhängigen Grundbestandtheile des Dreiecks dar.

Es läßt sich aber auch der Zusammenhang zwischen fünf oder allen sechs Grundbestandtheilen des Dreiecks durch Gleichungen ausdrücken.

Schließt man zunächst den dritten Winkel, als durch die beiden anderen allein schon bestimmt, aus, so erhält man für den Zusammenhang zwischen den drei Seiten und zwei Winkeln die schon früher (§. 10, S. 26) beiläufig abgeleitete Gleichung

95) $$c = b \cdot \cos A + a \cdot \cos B.$$

Von diesen fünf Grundbestandtheilen sind gleichwohl immer nur drei willkürlich bestimmbar, und die beiden übrigen allemal von jenen abhängig. Nach bekannten Grundsätzen der Algebra reicht aber eine Gleichung nicht aus, um zwei in sie verflochtene unbekannte Größen vollständig zu bestimmen. Es würde dazu noch eine zweite, von der ersten wesentlich verschiedene Bedingungsgleichung gegeben sein müssen. Aus beiden Gleichungen ließe sich dann eine unbekannte Größe nach der anderen eliminiren.

In diesem Sinne ließen sich alle Aufgaben der ebenen Trigonometrie auch auf zwei Grundgleichungen zurückführen. Die Elimination eines der fünf Grundbestandtheile würde aber zunächst immer wieder auf eine der vorigen Grundgleichungen führen.

Wählte man z. B. die Gleichungen 95) und 92)

$$c = b \cdot \cos A + a \cdot \cos B$$

und $$b \cdot \sin A = a \cdot \sin B$$

zu Grundgleichungen, so ließe sich eine der Seiten a oder b eliminiren, indem man den aus der zweiten Gleichung abgeleiteten Werth derselben

$$\left(a = \frac{b \cdot \sin A}{\sin B} \quad \text{oder} \quad b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A}\right)$$

in die erste substituirte. Man erhält dadurch

$$c = b \cos A + b \sin A \cdot \cot B$$

oder $$c = a \sin B \cdot \cot A + a \cdot \cos B,$$

Gleichungen, welche offenbar mit Gleichung 93) übereinstimmen.

Wollte man aber einen der Winkel, z. B. B, eliminiren, so wäre der kürzeste Weg, beide Gleichungen in der Form

$$c - b.\cos A = a.\cos B$$

und
$$b.\sin A = a.\sin B$$

ins Quadrat zu erheben und die Resultate zu addiren. Man erhält dadurch

$$\begin{array}{rl} c^2 - 2bc.\cos A + b^2.\cos A^2 &= a^2.\cos B^2 \\ b^2.\sin A^2 &= a^2.\sin B^2 \\ \hline c^2 - 2bc.\cos A + b^2 \qquad &= a^2 \end{array}$$

offenbar die Gleichung 94) — (und die ihr entsprechende

$$c^2 - 2bc.\cos B + a^2 = b^2,$$

wenn man A eliminirt).

Den Zusammenhang zwischen den drei Seiten und zwei Winkeln des Dreiecks drücken auch die nachstehenden, von Mollweide aufgestellten Gleichungen aus:

$$a.\cos\frac{B-C}{2} = (b+c)\cos\frac{B+C}{2} \tag{96}$$

$$a.\sin\frac{B-C}{2} = (b-c)\sin\frac{B+C}{2}. \tag{97}$$

Für die Ableitung derselben werden folgende Andeutungen genügen. Es ist nach 92)

$$a.\sin B = b.\sin A$$

und
$$a.\sin C = c.\sin A,$$

mithin
$$a(\sin B + \sin C) = (b+c)\sin A$$

und
$$a(\sin B - \sin C) = (b-c)\sin A,$$

woraus weiter nach 76) und 77), und weil $\sin A = \sin(B+C)$ nach 68) $= 2\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B+C}{2}$ ist,

$$2a.\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2} = 2(b+c)\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B+C}{2}$$

und

$$2a.\sin\frac{B-C}{2}.\cos\frac{B+C}{2} = 2(b-c)\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B+C}{2}$$

und, nach Aufhebung der gleichen Factoren auf beiden Seiten, die angegebenen Gleichungen 96) und 97) folgen.

Als Beispiele von Gleichungen, welche den Zusammenhang zwischen allen sechs Grundbestandtheilen des Dreiecks ausdrücken, können die eben abgeleiteten

$$a(\sin B \mp \sin C) = (b \mp c) \sin A$$

oder

$$\frac{\sin B \mp \sin C}{\sin A} = \frac{b \mp c}{a}$$

gelten. Gleichungen dieser Art sind aber dadurch, daß man für die Functionen des dritten Winkels die gleichgeltenden Functionen der Summe der beiden anderen setzt, sofort auf solche Gleichungen zurückzuführen, in welchen nur zwei Winkel und die drei Seiten des Dreiecks vorkommen. In welchen Fällen und auf welche Weise übrigens auch die zuletzt aufgestellten Gleichungen 95), 96), 97) zur Lösung von Aufgaben zweckmäßig zu gebrauchen sind, wird aus einigen später vorkommenden Anwendungen derselben erhellen. (Vergl. §. 13, II, 2; §. 15, 2 u. §. 16.)

§. 13.

Auflösung beliebiger Dreiecke.

Vermittelst der drei im vorigen Paragraphen entwickelten Grundgleichungen lassen sich nun aus je drei bestimmenden Stücken des Dreiecks die abhängigen Stücke der Figur berechnen.

1. Es seien gegeben zwei Winkel und eine Seite des Dreiecks. Da durch zwei Winkel des Dreiecks der dritte schon mit bestimmt wird, so bedarf es keiner Unterscheidung der beiden unter dieser Annahme begriffenen Fälle, ob die Seite beiden Winkeln anliegt, oder nur dem einen an-, dem anderen gegenüberliegt. Zu bestimmen bleiben in diesem Falle nur noch die beiden übrigen Seiten des Dreiecks.

Angenommen also, es seien A, B (mithin auch C) und a gegeben, so sind noch b und c zu bestimmen.

Es folgt aber aus 92) $b . \sin A = a . \sin B$, daß

98) $$b = \frac{a . \sin B}{\sin A}$$

ist, oder aus $c . \sin A = a . \sin C$, daß

$$c = \frac{a . \sin C}{\sin A} \text{ ist [1].}$$

[1] Man könnte in dieser Formel statt $\sin C$ auch $\sin(A + B)$ schreiben, wenn man sich in derselben streng nur an die unmittelbar gegebenen Stücke halten wollte.

Wären

Wäre beispielsweise $A = 36^{0}\,15'$, $B = 75^{0}\,43'$, mithin $C = 68^{0}\,2'$ und $a = 473{,}5'$, so erhielte man b und c durch folgende Rechnung:

$$\begin{array}{rl}
\log a = & 2{,}6753200 \\
(-)\ \log \sin A = & \underline{9{,}7718150} \\
& 2{,}9035050 \\
(+)\ \log \sin B = & \underline{9{,}9863630} \\
\log b = & 2{,}8898680 \\
b = & 776{,}01'.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
& 2{,}9035050 \\
(+)\ \log \sin C = & \underline{9{,}9672679} \\
\log c = & 2{,}8707729 \\
c = & 742{,}63'.
\end{array}$$

2. Es seien gegeben ein Winkel und die beiden denselben einschließenden Seiten, A, b und c. Zu bestimmen sind alsdann noch die beiden abhängigen Winkel, B und C, und die dritte Seite, a.

a. Um zunächst einen der abhängigen Winkel zu berechnen, erhält man aus 93) $b \,.\, \sin A = (c - b \,.\, \cos A) \,.\, tg\, B$

$$tg\, B = \frac{b \sin A}{c - b \,.\, \cos A} \text{ [1]}. \tag{99}$$

Ist $c > b \,.\, \cos A$, so wird $tg\, B$ ein positiver Werth, und B ein spitzer Winkel, derselbe, den die Tafeln für $\log tg\, B$ ergeben. Ist $c < b \,.\, \cos A$, so wird $tg\, B$ ein negativer Werth, und B ein stumpfer Winkel, nämlich der Nebenwinkel desjenigen, den die Tafeln für $\log tg\, B$ ergeben. Wäre endlich $c = b \,.\, \cos A$, also $c - b \,.\, \cos A = 0$, so würde $tg\, B$ ein unbestimmbarer Werth $(= \infty)$, und B ein rechter Winkel.

Beispielsweise sei $A = 61^{0}$, $b = 3908'$ und $c = 2597'$, so entspricht der Formel nachstehende Rechnung.

$$\begin{array}{rl}
\log b = & 3{,}5919546 \\
(+)\ \log \sin A = & \underline{9{,}9418193} \\
& 3{,}5337739 \\
(-)\ \log (c - b \cos A) = & \underline{2{,}8465623} \\
\log tg\, B = & 10{,}6872116 \\
B = & 78^{0}\,23'\,16{,}8'' \\
C = & 40^{0}\,36'\,43{,}2''
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log b = & 3{,}5919546 \\
(+)\ \log \cos A = & \underline{9{,}6855712} \\
& 3{,}2775258 \\
c = & 2597 \\
b \,.\, \cos A = & \underline{1894{,}636} \\
c - b \,.\, \cos A = & 702{,}364.
\end{array}$$

Wären A, B und c als gegeben angenommen, so ergäbe sich aus

$$a \,.\, \sin C = c \,.\, \sin A$$
$$a = \frac{c \,.\, \sin A}{\sin C} = \frac{c \,.\, \sin A}{\sin (A + B)}$$

und aus

$$b \,.\, \sin C = c \,.\, \sin B$$
$$b = \frac{c \,.\, \sin B}{\sin C} = \frac{c \,.\, \sin B}{\sin (A + B)}.$$

Dergleichen Abänderungen von Formeln, welche, ohne das Wesen der Sache zu berühren, bloß auf eine Verwechslung von Buchstaben oder Namen hinauslaufen, dürfen indessen fortan dem denkenden Rechner selbst überlassen werden.

[1]) oder aus $c \,.\, \sin A = (b - c \,.\, \cos A)\ tg\, C$

$$tg\, C = \frac{c \,.\, \sin A}{b - c \,.\, \cos A}.$$

Diese Berechnung des Winkels B mit Hülfe der Logarithmen wird dadurch unbequem, weil die Logarithmenrechnung durch die im Nenner des Bruchs vorgeschriebene Subtraction unterbrochen wird. Man hat diese Unbequemlichkeit auf folgende Weise zu umgehen gewußt.

Nach 92) ist

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C},$$

mithin, indem von beiden Verhältnissen 1 subtrahirt und zu beiden 1 addirt wird,

$$\frac{b - c}{c} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin C}$$

$$\frac{b + c}{c} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin C},$$

und wenn die erste Gleichung durch die zweite dividirt wird,

$$\frac{b - c}{b + c} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}.$$

Nach 80) ist aber

$$\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} = \frac{tg\,\frac{B - C}{2}}{tg\,\frac{B + C}{2}} \quad \left[= \frac{b - c}{b + c}\right].$$

Man erhält also

100) $$tg\,\frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{b + c} \cdot tg\,\frac{B + C}{2} \text{ [1]}.$$

Da der Winkel A gegeben ist, so ist auch die Summe der beiden abhängigen Winkel, $B + C = 180^0 - A$, und auch $\frac{B + C}{2}$ bekannt. Wird nun nach der vorstehenden Formel, welche für die Anwendung der Logarithmen sehr bequem ist, auch $\frac{B - C}{2}$ berechnet, so ergiebt sich aus beiden Werthen bekanntlich

$$B = \frac{B + C}{2} + \frac{B - C}{2}$$

und $$C = \frac{B + C}{2} - \frac{B - C}{2}.$$

---

[1] Diese Gleichung kann auch einfach aus den Mollweide'schen Gleichungen 96) und 97) dadurch abgeleitet werden, daß man die eine durch die andere dividirt.

Die Berechnung des vorigen Beispiels gestaltet sich nach dieser Vorschrift, wie folgt:

Aus $A = 61^0$ und aus $b = 3908'$
und $c = 2597'$

findet man $B + C = 119^0$ $b - c = 1311'$

und $\frac{B + C}{2} = 59^0\,30'$ $b + c = 6505'$

Nun ist
$$\begin{aligned}
\log tg\frac{B+C}{2} &= 10{,}2298515 \\
(+)\ \log(b-c) &= \ \ 3{,}1176027 \\
&\ \ \ \ 3{,}3474542 \\
(-)\ \log(b+c) &= \ \ 3{,}8132473 \\
\log tg\frac{B-C}{2} &= \ \ 9{,}5342069 \\
\frac{B-C}{2} &= 18^0\,53'\,16{,}8''
\end{aligned}$$

mithin, da
$$\begin{aligned}
\frac{B+C}{2} &= 59^0\,30' \quad - \quad \text{ist,} \\
B &= 78^0\,23'\,16{,}8'' \\
\text{und } C &= 40^0\,36'\,43{,}2''.
\end{aligned}$$

Die halbe Differenz zweier Dreieckswinkel $\frac{B - C}{2}$ kann immer nur ein spitzer Winkel sein. Gleichwohl wird der Werth von $tg\frac{B-C}{2}$ negativ werden, wenn $b < c$ ist. Darin liegt denn offenbar nur die Andeutung, daß in diesem Falle die Differenz der Winkel, $B - C$, selbst negativ ist (vergl. 61). Bekanntlich liegt der kleineren Seite im Dreieck auch der kleinere Winkel gegenüber: wenn also $b < c$ ist, muß auch $B < C$ sein. — Bei Berechnung der Winkel B und C nach der vorstehenden Formel 100) ist natürlich dieses Verhältniß im Auge zu behalten.

b. Soll aus einem Winkel und den beiden ihn einschließenden Seiten, A, b und c, die dritte Seite, a, gefunden werden, so ergiebt sich dafür aus Gleichung 94) durch bloße Wurzelausziehung

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\,bc \,.\, cos\, A}. \tag{101}$$

Es versteht sich von selbst, daß nur der positive Werth dieser Wurzel gemeint sein kann.

Die Formel ist für Anwendung der Logarithmen äußerst unbequem. Würde verlangt, aus den drei gegebenen Stücken A, b und c sämmtliche abhängige Grundbestandtheile des Dreiecks zu berechnen, so wäre es offenbar am gerathensten, erst nach 100) die beiden abhängigen Winkel (B und C), und alsdann mit Zuziehung eines derselben nach 98) die fehlende Seite (a) zu berechnen. Ja dieser Rechnungsweg ist für die Anwendung der Logarithmen selbst dann noch vortheilhaft, wenn es bloß auf die Bestimmung der dritten Seite abgesehen ist. — In dem vorigen Beispiele findet man auf die eine oder andere Weise $a = 3489{,}43$.

Man kann indessen die obige Formel auch durch Einführung eines sogenannten Hülfswinkels — eine Methode, welche vielfach bei trigonometrischen Rechnungen mit Nutzen gebraucht wird, — für die Logarithmenrechnung geschickt machen.

Aus $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \,.\, cos\,A$ wird nämlich, indem das Glied $2\,bc$ zugleich addirt und subtrahirt wird,

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,bc - 2\,bc - 2\,bc \,.\, cos\,A$$

$$= (b + c)^2 - 2\,bc\,(1 + cos\,A)$$

oder

$$= (b - c)^2 + 2\,bc\,(1 - cos\,A)$$

und wenn nach 72) $\qquad 1 + cos\,A = 2\left(cos\frac{A}{2}\right)^2$

oder nach 71) $\qquad 1 - cos\,A = 2\left(sin\frac{A}{2}\right)^2$ gesetzt wird,

$$a^2 = (b + c)^2 - 4\,bc \,.\left(cos\frac{A}{2}\right)^2$$

$$= (b + c)^2\left(1 - \frac{4\,bc \,.\left(cos\frac{A}{2}\right)^2}{(b + c)^2}\right)$$

oder

$$a^2 = (b - c)^2 + 4\,bc \,.\left(sin\frac{A}{2}\right)^2$$

$$= (b - c)^2\left(1 + \frac{4\,bc \,.\left(sin\frac{A}{2}\right)^2}{(b - c)^2}\right).$$

Man setze nun $\qquad \dfrac{4\,bc \,.\left(cos\frac{A}{2}\right)^2}{(b + c)^2} = sin\,\varphi^2$

also $\qquad \dfrac{2\sqrt{bc} \,.\, cos\frac{A}{2}}{(b + c)} = sin\,\varphi.$

Dieses ist jedenfalls erlaubt, da $4\,bc = (b + c)^2 - (b - c)^2$

nothwendig kleiner als $(b+c)^2$, umsomehr $4\,bc\,.\left(\cos\frac{A}{2}\right)^2 < (b+c)^2$ ist.

Oder man setze $$\frac{4\,bc\,.\left(\sin\frac{A}{2}\right)^2}{(b-c)^2} = tg\,\psi^2,$$

also $$\frac{2\sqrt{bc}\,.\sin\frac{A}{2}}{(b-c)} = tg\,\psi,$$

was unbedingt zulässig ist, weil die Tangente eines Winkels jeden noch so großen oder noch so kleinen Werth annehmen kann. — Im ersten Falle erhält man

$$a^2 = (b+c)^2\,(1-\sin\varphi^2) = (b+c)^2.\cos\varphi^2$$

mithin $$a = (b+c)\,.\cos\varphi, \tag{102}$$

im zweiten $a^2 = (b-c)^2\,(1+tg\,\psi^2) = \dfrac{(b-c)^2}{\cos\psi^2}$ [nach 13)]

mithin $$a = \frac{(b-c)}{\cos\psi}. \tag{103}$$

Es wird genügen, beispielsweise mit Beibehaltung der obigen Zahlenangaben die Rechnung für den Hülfswinkel φ durchzuführen. Man hat also $A = 61^0$, $\left(\frac{A}{2} = 30^0\,30'\right)$, $b = 3908'$ und $c = 2597'$. Nun soll $\dfrac{2\sqrt{bc}\,.\cos\frac{A}{2}}{(b+c)} = \sin\varphi$ gesetzt werden.

$$\begin{aligned}
\log b &= 3{,}5919546\\
(+)\ \log c &= 3{,}4144719\\
&\overline{7{,}0064265}\ (:2)\\
\log\sqrt{bc} &= 3{,}5032132\\
(+)\ \log 2 &= 0{,}3010300\\
(+)\ \log\cos\frac{A}{2} &= 9{,}9353204\\
&\overline{3{,}7395636}\\
(-)\ \log(b+c) &= 3{,}8132473\\
&\overline{9{,}9263163} = \log\sin\varphi\\
\varphi &= 57^0\,33'\,34{,}3''\\
\log\cos\varphi &= 9{,}7295075\\
(+)\ \log(b+c) &= 3{,}8132473\\
&\overline{3{,}5427548} = \log a\\
a &= 3489{,}43.
\end{aligned}$$

3. Es seien gegeben ein Winkel, die ihm gegenüberliegende und eine an ihm liegende Seite, A, a und b. Zu bestimmen sind

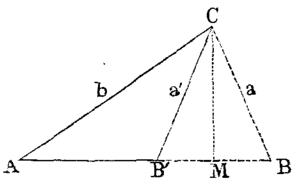
alsdann entweder der der zweiten Seite gegenüberliegende Winkel, B, oder der von beiden gegebenen Seiten eingeschlossene Winkel, C, oder die dritte Seite, c.

a. Um den Gegenwinkel der Seite zu finden, welche an dem gegebenen Winkel liegt, B, dient die Gleichung 92), aus welcher

104) $$\sin B = \frac{b \,.\, \sin A}{a} \text{ folgt.}$$

Der gesuchte Winkel, B, wird durch seinen Sinus bestimmt. Er kann also zweideutig sein; denn derselbe Sinus gehört ebensowohl wie einem spitzen Winkel auch dem stumpfen Nebenwinkel desselben an. Ein stumpfer Winkel kann aber B nur sein, wenn $b > a$ ist, worin zugleich die Bedingung liegt, daß A ein spitzer Winkel sein muß. In diesem Falle, welchen Fig. 21 darstellt, ist aber in der That die Construction des Dreiecks aus den drei gegebenen Stücken zweideutig, so daß aus ihnen ebensowohl das Dreieck $AB'C$ wie ABC gebildet werden kann. Das eine enthält der Seite b gegenüber den spitzen Winkel B, das andere in derselben Lage den stumpfen Nebenwinkel desselben $AB'C = 180^0 - B$.

Fig. 21.



Nur wenn zwar $b > a$, aber $b \,.\, \sin A = a$, mithin

$$\sin B = \frac{b \,.\, \sin A}{a} = 1$$

ist, hört die Zweideutigkeit der Construction und der Bestimmung des Winkels B wieder auf. Denn in dieser Voraussetzung ist $a\,(= b \,.\, \sin A) = CM$, und der Winkel $B = 90^0$.

Die Formel entspricht also in jeder Beziehung dem Sachverhältniß.

b. Soll aus den gegebenen Stücken der von den beiden Seiten a und b eingeschlossene Winkel, C, bestimmt werden, so gelangt man am leichtesten zum Ziele, indem man nach der vorigen Formel erst B, und dann aus A und B den dritten Winkel C berechnet, oder indem man $\sin B = \sin(A + C)$ setzt, aus $\sin(A + C) = \frac{b \,.\, \sin A}{a}$ zunächst die Summe $A + C$ bestimmt und von derselben den gegebenen Winkel A abzieht. — Die Zweideutigkeit der Bestimmung, wenn $b > a$ und nicht gerade $b \cdot \sin A = a$ ist, überträgt sich von dem Winkel B oder der Summe $A + C$ auch auf den Winkel C.

Sollte der Winkel C unmittelbar aus den gegebenen Stücken A, a und b berechnet werden, so müßte man von der Gleichung 93) ausgehen, welche mit Vertauschung der in ihr genannten gegen die hier in Betracht kommenden Stücke heißen würde:

$$a \cdot \sin C = (b - a \cdot \cos C) \, tg \, A.$$

Da dieselbe zwei verschiedene Functionen des gesuchten Winkels, $\sin C$ und $\cos C$, enthält, so muß zunächst die eine dieser Functionen auf die andere zurückgeführt, also entweder $\sin C = \sqrt{1 - \cos C^2}$ oder $\cos C = \sqrt{1 - \sin C^2}$ gesetzt werden. Geschieht das Letztere, wird sodann der irrationale Werth (durch Absonderung desselben auf einer Seite der Gleichung und Erhebung der Gleichung zum Quadrat) beseitigt, und die gewonnene Gleichung in Bezug auf $\sin C$ nach den Regeln für die Auflösung gemischter quadratischer Gleichungen aufgelöst, so ergiebt sich

$$\sin C = \frac{\sin A}{a} \left(b \cdot \cos A \mp \sqrt{a^2 - b^2 \cdot \sin A^2}\right). \qquad (105$$

Man erhält hiernach zwei Werthe für $\sin C$, so lange $b \cdot \cos A$ (in Fig. 21 $= AM$) größer ist als $\sqrt{a^2 - b^2 \cdot \sin A^2}$

(d. i. $\sqrt{CB^2 - CM^2} = MB$ oder MB'),

außer wenn $\sqrt{a^2 - b^2 \cdot \sin A^2} = 0$ oder $a = b \cdot \sin A$ (d. i. $= CM$) ist. Im letzteren Falle würde $\sin C = \frac{b \cdot \sin A \cdot \cos A}{a} = \cos A$, also $C = 90^0 - A$, und der dritte Winkel $B = 90^0$. Sonst ist $b \cdot \cos A \mp \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2} = AM \mp MB = AB$ oder $= AB'$, und danach $\sin C = \frac{AB \cdot \sin A}{a}$ oder $= \frac{AB' \cdot \sin A}{a}$, wie es gemäß Gleichung 92) sein muß.

Der Ausdruck für $\sin C$ wird imaginär, wenn $a < b \cdot \sin A$, d. i. $CB < CM$ wird.

Die Berechnung des Winkels C nach der Formel 104) mit Hülfe der Logarithmen würde übrigens unerträglich weitläufig werden. Man wendet deßhalb diese Berechnungsart um so weniger an, da sie durch die zuvor angegebene sehr bequem ersetzt werden kann.

c. **Um endlich aus den oben angenommenen Stücken A, a und b die dritte Seite zu berechnen, dient die Gleichung 94)**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \, . \cos A,$$

aus welcher, wenn sie in Bezug auf c aufgelöst wird, zunächst

$$c^2 - 2b \, . \cos A \, . \, c + b^2 \cos A^2 = a^2 - b^2 \sin A^2$$

106) und $\quad$ $\mathbf{c = b \, . \cos A \mp \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}}$ $\quad$ folgt.

Dieser Werth ist augenscheinlich der eine Factor in dem vorigen Ausdruck 104) für $\sin C$. Die Formel giebt also auch für die Seite c zwei verschiedene Werthe, so lange

$$b \, . \cos A > \sqrt{a^2 - b^2 \sin A^2}$$

d. i. in Fig. 21 $\quad AM > \sqrt{a^2 - CM^2}$

oder $\quad AM > MB$ oder MB' ist.

Denn wäre $b \, . \cos A < \sqrt{a^2 - b^2 \, . \sin A^2}$, so würde der zweite Werth der Seite c, welcher dem Zeichen — vor der Wurzelgröße entspricht, negativ, was keinen Sinn haben kann. Der Punkt B' fiele unter dieser Voraussetzung jenseits des Scheitelpunktes des Winkels A.

Wäre $a < b \, . \sin A$, d. i. $CB < CM$, so würde auch der Werth von c imaginär: es könnte alsdann aus den drei Stücken A, a und b überall gar kein Dreieck zu Stande kommen.

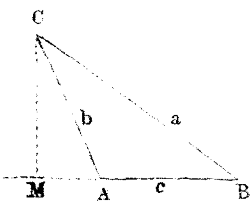
Die Zweideutigkeit des Werthes von c besteht aber nur so lange, als $b \, . \cos A$ ein positiver Werth, d. h. so lange A ein spitzer Winkel ist. Wird A als rechter Winkel angenommen, also $\cos A = 0$ und $\sin A = 1$, so reducirt sich die Formel auf $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, und die Wurzel kann in diesem Falle nur positiv sein. Wird A als stumpfer Winkel angenommen, so ist $\cos A$ mithin auch $b \, . \cos A$ negativ, und die Wurzel $\sqrt{a^2 - b^2 . \sin A^2}$ muß positiv genommen werden, wenn der Werth der Seite c positiv werden soll, wie es sein muß. In diesem Falle wird

$$c = - b \, . \cos A + \sqrt{a^2 - b^2 \, . \sin A^2}$$

in Fig. 22

$$= - AM + BM = AB.$$

Fig. 22.



Alle diese Rechnungsresultate stimmen mit bekannten Sätzen aus der Dreieckslehre überein.

Zur Berechnung vermittelst Logarithmen läßt sich übrigens die Formel 106) nicht geeignet machen. Für die Praxis zieht man daher vor, aus A, a und b zuerst nach 104) den Winkel B, daraus den dritten Winkel C, und dann nach 98) die dritte Seite c zu berechnen.

4. Sind endlich die drei Seiten eines Dreiecks, a, b und c, gegeben, so kann nur einer der drei Winkel als das gesuchte vierte Stück angesehen werden.

Für diesen Fall ergiebt sich aus 94)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \tag{107}$$

Wenn $b^2 + c^2 > a^2$, so erhält man für $\cos A$ einen positiven Werth, folglich A als spitzen Winkel.

Ist $b^2 + c^2 = a^2$, so wird $\cos A = 0$, also A ein rechter Winkel.

Ist endlich $b^2 + c^2 < a^2$, so wird $\cos A$ ein negativer Werth, folglich ist A ein stumpfer Winkel, und zwar der Nebenwinkel desjenigen spitzen Winkels, welchen die Tafeln als zu dem absolut (ohne Rücksicht auf sein Vorzeichen) genommenen Werthe des Cosinus gehörig angeben.

Der Bruch $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ muß aber immer ein echter Bruch sein, weil bekanntlich immer

$$b - c < a \qquad \text{oder} \qquad b + c > a,$$

folglich

$$b^2 - 2bc + c^2 < a^2 \qquad \text{»} \qquad b^2 + 2bc + c^2 > a^2$$

und

$$b^2 + c^2 - a^2 < 2bc \qquad \text{»} \qquad 2bc > a^2 - b^2 - c^2$$

ist.

Die Berechnung des Winkels nach vorstehender Formel macht wenig Umstände, wenn die Zahlen, welche die Längen der Seiten a, b und c angeben, mit wenigen Ziffern geschrieben werden.

Wäre z. B. $a = 7{,}3$, $b = 10{,}5$ und $c = 6{,}4$, so erhielte man

$$\cos A = \frac{110{,}25 + 40{,}96 - 53{,}29}{2\,.\,10{,}5\,.\,6{,}4} = \frac{97{,}92}{134{,}4}$$

$$\begin{aligned} \log 97{,}92 &= 1{,}9908714 \\ (-)\ \log 134{,}4 &= 2{,}1283993 \\ \hline \log \cos A &= 9{,}8624721 \end{aligned}$$

und

$$A = 43^\circ\ 14'.$$

Sind dagegen jene Zahlen vielziffrige, so daß die Berechnung ihrer Quadrate und des Productes $2bc$ ohne Hülfe der Logarithmen unbequem würde, so macht auch die Anwendung der Logarithmen die Rechnung nicht viel weniger weitläufig. Für solche Fälle hat man sich dadurch zu helfen gewußt, daß man nicht den Winkel selbst, sondern zunächst seine Hälfte aus den drei Seiten berechnet.

Es ist nämlich nach 72) oder 71)

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \quad \text{oder} \quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},$$

und wenn in diese Formeln der obige Werth für $\cos A$ eingeführt wird, nach leicht erkennbaren Umformungen:

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{4bc}} \quad \text{oder} \quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{a^2-b^2+2bc-c^2}{4bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}} \quad , \quad = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

108) $$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{4bc}}$$

oder $$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a-b+c)\,(a+b-c)}{4bc}}$$

Noch gewöhnlicher und für die Rechnung ganz bequem drückt man diese Formeln so aus, daß man $a+b+c=s$, also $\frac{a+b+c}{2} = \frac{s}{2}$ setzt, woraus weiter folgt, daß $\frac{b+c-a}{2} = s/_2 - a$, $\frac{a-b+c}{2} = s/_2 - b$ und $\frac{a+b-c}{2} = s/_2 - c$ ist. Durch Einführung dieser Bezeichnung erhält man

109) $$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s/_2\,.\,(s/_2-a)}{bc}} \quad \text{und} \quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s/_2-b)\,(s/_2-c)}{bc}}.$$

Es versteht sich von selbst, daß diese Wurzeln nur positiv genommen werden können.

Für die vorhin beispielsweise gewählten Zahlen $a=7{,}3$, $b=10{,}5$ und $c=6{,}4$ wird $s = 24{,}2$, $s/_2 = 12{,}1$ und

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{12{,}1\,.\,4{,}8}{10{,}5\,.\,6{,}4}} \quad \text{oder} \quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1{,}6\,.\,5{,}7}{10{,}5\,.\,6{,}4}}.$$

Beide Werthe geben $\frac{A}{2} = 21^0\,37'$, also übereinstimmend mit dem vorhin gefundenen Werthe $A = 43^0\,14'$.

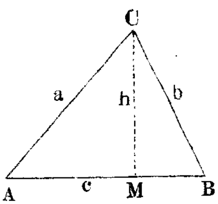
Man sieht übrigens ohne Weiteres, daß die Rechnung nach den Formeln 109) oder 108) sich möglichst gut für die Anwendung der Logarithmen eignet.

§. 14.

Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks aus drei gegebenen Grundbestandtheilen desselben.

So wie der Umfang, wird auch die Fläche eines Dreiecks durch drei gegebene Grundbestandtheile desselben bestimmt. Der Flächeninhalt eines Dreiecks muß sich also auch aus drei willkürlich angenommenen Stücken der Figur berechnen lassen. Bekanntlich berechnet sich aber der Flächeninhalt eines Dreiecks durch das halbe Product der Basis und Höhe, — d. h. der Zahlen, welche die Länge der Basis und Höhe ausdrücken. Als Basis kann jede beliebige Seite angenommen werden; die zugehörige Höhe ist alsdann ihr senkrechter Abstand von der gegenüberliegenden Ecke. Es kommt also nur darauf an, da immer mindestens eine Seite zur Bestimmung des Dreiecks gegeben sein muß, auch noch die zu einer Seite gehörige Höhe vermittelst der gegebenen Grundbestandtheile auszudrücken.

Fig. 23.



1. **Um aus einem Winkel und zwei denselben einschließenden Seiten**, z. B. A, b und c, Fig. 23, die Fläche des Dreiecks zu berechnen, wählt man zweckmäßig eine dieser Seiten, z. B. c, zur Basis und fällt auf sie aus der gegenüberliegenden Ecke das Loth $CM = h$. Nun ist der Flächeninhalt des Dreiecks $= \frac{c \cdot h}{2}$, und da $h = b \cdot \sin A$ ist,

$$\text{Drfl.} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}. \tag{110}$$

Die Formel läßt auch für die Berechnung vermittelst Logarithmen nichts zu wünschen übrig.

2. **Sind zwei Winkel und eine Seite** zur Berechnung der Dreiecksfläche gegeben, so braucht kein Unterschied danach gemacht zu werden, ob beide Winkel der Seite anliegen oder nicht. Denn immer ist durch zwei Winkel auch der dritte Winkel des Dreiecks mit bestimmt; es können also in diesem Falle zur Berechnung der Dreiecksfläche je zwei beliebige oder auch alle drei Winkel benutzt werden.

Ist nun z. B. die Seite c nebst den Winkeln A, B und C gegeben, so erhält man aus der vorigen Formel 110)

$$\text{Drfl.} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2},$$

wenn in ihr nach 98) $b = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C}$ gesetzt wird,

111) $$\text{Drfl.} = \frac{c^2 \cdot \sin A \cdot \sin B}{2 \sin C}.$$

Man könnte in dieser Formel statt $\sin C$ auch $\sin(A + B)$ oder statt $\sin B$ auch $\sin(A + C)$ oder statt $\sin A$ auch $\sin(B + C)$ schreiben, wenn daran gelegen wäre, einen der drei Winkel aus ihr zu verdrängen. — Die Formel ist übrigens auch für die Anwendung der Logarithmen ganz geeignet.

3. Soll die Dreiecksfläche aus einem Winkel, der ihm gegenüberliegenden und einer ihm anliegenden Seite, z. B. aus A, a und b, berechnet werden, so läßt sich die Regel dafür auf zweierlei Weise aus den schon gefundenen Vorschriften ableiten.

Entweder man setzt in der Formel 110)

$$\text{Drfl.} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}$$

für c den Nr. 106) gefundenen Werth, oder man bestimmt nach derselben Formel die Dreiecksfläche erst aus den Seiten a und b und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel C, nämlich

$$\text{Drfl.} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2},$$

und führt in diesen Ausdruck statt $\sin C$ den Nr. 105) dafür gefundenen Werth ein. Auf die eine wie auf die andere Art erhält man

112) $$\text{Drfl.} = \frac{b \cdot \sin A}{2}\left(b \cos A \mp \sqrt{a^2 - b^2 \cdot \sin A^2}\right).$$

Natürlich überträgt sich in allen denjenigen Fällen, in welchen aus den gegebenen Grundbestandtheilen zwei verschiedene Dreiecke construirt werden können, dieselbe Zweideutigkeit auch auf die Berechnung der Dreiecksfläche, wie es die Formel deutlich ausspricht.

Zur Anwendung der Logarithmen eignet sich die Rechnung nach dieser Formel augenscheinlich nicht, und auch durch Umgestaltungen, Einführung von Hülfswinkeln u. dergl. läßt sich die Formel nicht erheblich geschickter dafür machen. Die Berechnung der Dreiecksfläche aus den angegebenen Grundbestandtheilen, A, a und b, wird am bequemsten, indem man aus denselben nach 104) erst noch die fehlenden Winkel B und C und sodann nach 111) den Flächeninhalt bestimmt. Die Zweideutigkeit jener Winkel unter den bekannten Voraussetzungen hat sodann eine entsprechende Zweideutigkeit des Flächeninhalts unter denselben Voraussetzungen zur Folge.

4. Um endlich aus den drei Seiten des Dreiecks, a, b und c, die Fläche desselben zu berechnen, giebt schon die Planimetrie die Vorschrift

$$\text{Drfl.} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c)} \qquad (113$$
$$= \sqrt{s/_2\,(s/_2-a)\,(s/_2-b)\,(s/_2-c)},$$

wenn $(a+b+c)$ abgekürzt mit s bezeichnet wird.

Es bedarf auch in der That zur Ableitung dieser Vorschrift nicht der Hülfe trigonometrischer Begriffe, sondern nur der Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes.

Wenn man nämlich in Fig. 23 $BM = x$, also $AM = c - x$ setzt, so erhält man

$$h^2 = a^2 - x^2 = b^2 - (c-x)^2,$$

daraus
$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c},$$

und durch Einführung dieses Werthes in den vorigen Ausdruck

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right)^2.$$

Durch einige sich leicht darbietende Umformungen ergiebt sich hieraus

$$h = \frac{1}{2c}\sqrt{(a+c+b)\,(a+c-b)\,(b+a-c)\,(b-a+c)},$$

und wenn dieser Werth in die bekannte Formel Drfl. $= \frac{c\,.\,h}{2}$ eingeführt wird, die obige Vorschrift 113).

Man kann dieselbe aber auch auf Grundlage bisher entwickelter trigonometrischer Formeln ableiten, indem man in der Formel 110)

$$\text{Drfl.} = \frac{b\,.\,c\,.\,\sin A}{2}$$

für $\sin A$ nach 68) $2\sin\frac{A}{2}\,.\cos\frac{A}{2}$, und dann für $\sin\frac{A}{2}$ und $\cos\frac{A}{2}$ die unter 108) oder 109) angegebenen Werthe setzt.

Anhang.

§. 15.

Zwei Aufgaben der praktischen Geometrie.

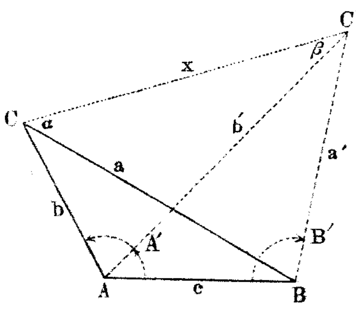
Unter den Aufgaben, welche durch zusammengesetztere trigonometrische Rechnungen zu lösen sind, verdienen ihrer praktischen Wichtigkeit wegen zwei Aufgaben der praktischen Geometrie hervorgehoben zu werden.

1. Die eine fordert,

den Abstand zweier (unzugänglicher) Punkte zu berechnen, deren Lage dadurch bestimmt ist, daß an den Enden einer gegebenen Linie die Winkel gemessen werden, welche die Richtungen auf jene Punkte mit der gegebenen Linie einschließen.

Es sei in Fig. 24 die gegebene Standlinie $AB = c$; die beiden Punkte, deren Abstand gesucht wird, seien C und C', und zur Bestimmung ihrer Lage seien in den Dreiecken CAB und $C'AB$ die Winkel an der Basis AB gemessen, — sie mögen abgekürzt nach ihren Scheitelpunkten im ersten Dreieck A und B, im zweiten A' und B' genannt werden. Dadurch sind auch die Winkel C $(= ACB)$ und C' $(= AC'B)$ bekannt.

Fig. 24.



Nun erscheint die gesuchte Länge $CC' = x$ als Seite in dem Dreieck CAC', dessen beide andere Seiten, der bisherigen Bezeichnung gemäß durch b und b' bezeichnet, den Winkel $CAC' = A - A'$ zwischen sich fassen, — oder in dem Dreiecke CBC' mit den beiden anderen Seiten a und a' und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel $B' - B$. Die Berechnung der Länge x aus dem einen Dreieck ist nicht wesentlich von der Berechnung aus dem anderen Dreieck verschieden. Es genügt also die eine.

Es ist aber nach 94)

$$x^2 = b^2 + b'^2 - 2b.b' \cos(A - A'),$$

und da nach 98)

$$b = \frac{c.\sin B}{\sin C} \quad \text{und} \quad b' = \frac{c.\sin B'}{\sin C'},$$

so ist

$$x^2 = \frac{c^2.\sin B^2}{\sin C^2} + \frac{c^2.\sin B'^2}{\sin C'^2} - 2c^2 \frac{\sin B.\sin B'}{\sin C.\sin C'}.\cos(A - A')$$

und $$x = c.\sqrt{\frac{\sin B^2}{\sin C^2} + \frac{\sin B'^2}{\sin C'^2} - 2\frac{\sin B.\sin B'}{\sin C.\sin C'}.\cos(A - A')}. \quad (114$$

Die Berechnung des Werthes x nach dieser Formel vermittelst Logarithmen erfordert mehrfach das Zurückgehen von den Logarithmen zu ihren Zahlen. Eine für logarithmische Rechnung geeignetere Formel erhält man, wenn man zunächst einen der Winkel $BCC' = \alpha$ oder $AC'C = \beta$ aufsucht.

Es ist aber $\alpha + \beta = A' + B$. Um nun auch $\alpha - \beta$ zu bestimmen, hat man

$$x.\sin\alpha = a'.\sin(B' - B)$$

und

$$x.\sin\beta = b.\sin(A - A'),$$

und weil $a' = \frac{c.\sin A'}{\sin C'}$ und $b = \frac{c.\sin B}{\sin C}$ ist, nach Substitution dieser Werthe, Division der einen Gleichung durch die andere und Aufhebung der gleichen Factoren,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin A'.\sin C.\sin(B' - B)}{\sin B.\sin C'.\sin(A - A')}.$$

Daraus ergiebt sich weiter

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{\sin A'.\sin C.\sin(B'-B) - \sin B.\sin C'.\sin(A-A')}{\sin A'.\sin C.\sin(B'-B) + \sin B.\sin C'.\sin(A-A')}$$

$$= \frac{1 - \dfrac{\sin B.\sin C'.\sin(A - A')}{\sin A'.\sin C.\sin(B' - B)}}{1 + \dfrac{\sin B.\sin C'.\sin(A - A')}{\sin A'.\sin C.\sin(B' - B)}}$$

und indem man

$$\frac{\sin B \cdot \sin C' \cdot \sin (A - A')}{\sin A' \cdot \sin C \cdot \sin (B' - B)} = tg\, Z$$

setzt, was immer zulässig ist, nach den Formeln 80) und 91)

$$\left[\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} =\right] \frac{tg\,\frac{\alpha - \beta}{2}}{tg\,\frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{1 - tg\, Z}{1 + tg\, Z} = tg\,(45^0 - Z),$$

mithin $tg\,\frac{\alpha - \beta}{2} = tg\,(45^0 - Z) \,.\, tg\,\frac{\alpha + \beta}{2}.$

Ist auf diese Weise $\frac{\alpha - \beta}{2}$ und aus diesem Werthe und aus $\frac{\alpha + \beta}{2}$ der Winkel α oder β berechnet, so findet sich

$$x = \frac{a' \cdot \sin (B' - B)}{\sin\alpha} = \frac{b \cdot \sin (A - A')}{\sin\beta}$$

115) oder $x = \frac{c \cdot \sin A' \cdot \sin (B' - B)}{\sin C' \cdot \sin\alpha} = \frac{c \cdot \sin B \cdot \sin (A - A')}{\sin C \cdot \sin\beta}.$

Es sei beispielsweise $c = 6725$ (Fuß, Ruthen, Meilen oder beliebige Längeneinheiten), $A = 132^0\, 41'\, 20''$ $A' = 54^0\, 18'\, 40''$
$B = 29^0\, 24'\, 10''$ $B' = 95^0\, 6'\, 30''$
mithin $C = 17^0\, 54'\, 30''$ $C' = 30^0\, 34'\, 50''$
$A - A' = 78^0\, 22'\, 40''$ und $B' - B = 65^0\, 42'\, 20''$.

Alsdann gestaltet sich die Rechnung nach der ersten Formel 114) wie folgt.

$$\log \sin B = 9{,}6910337 \qquad \log \sin B' = 9{,}9982716$$
$$\log \sin C = 9{,}4878381 \qquad \log \sin C' = 9{,}7065038$$
$$\log \frac{\sin B}{\sin C} = 0{,}2031956 \qquad \log \frac{\sin B'}{\sin C'} = 0{,}2917678$$
$$\log \left(\frac{\sin B}{\sin C}\right)^2 = 0{,}4063912 \qquad \log \left(\frac{\sin B'}{\sin C'}\right)^2 = 0{,}5835356$$
$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log \frac{\sin B}{\sin C} = 0{,}2031956 \qquad \left(\frac{\sin B}{\sin C}\right)^2 = 2{,}549125$$
$$\log \frac{\sin B'}{\sin C'} = 0{,}2917678 \qquad [+] \left(\frac{\sin B'}{\sin C'}\right)^2 = 3{,}832970$$
$$\log \cos (A - A') = 9{,}3041842 \qquad [-] \quad 6{,}382095$$
$$\log\left(2 \cdot \frac{\sin B}{\sin C} \cdot \frac{\sin B'}{\sin C'} \cos (A - A')\right) = 0{,}1001776; \qquad 2 \frac{\sin B}{\sin C} \cdot \frac{\sin B'}{\sin C'} \cos (A - A') = 1{,}259440$$
$$5{,}122655$$

$$\log 5{,}122655 = 0{,}7094951$$
$$\log \sqrt{5{,}122655} = 0{,}3547475$$
$$\log c = 3{,}8276923$$
$$\log x = 4{,}1824398$$
$$x = 15220{,}88.$$

Nach der zweiten Vorschrift 115) erhält man dagegen zuerst zur Berechnung des Hülfswinkels Z

$$\begin{aligned} \log \sin B &= 9{,}6910337 \\ \log \sin C' &= 9{,}7065038 \\ \log \sin (A - A') &= 9{,}9910032 \\ \hline & 9{,}3885407 \\ & - 9{,}3572289 \\ \hline \log tg\, Z &= 10{,}0313118 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log \sin A' &= 9{,}9096612 \\ \log \sin C &= 9{,}4878381 \\ \log \sin (B' - B) &= 9{,}9597296 \\ \hline & 9{,}3572289 \end{aligned}$$

also

$$Z = 47^0\, 3'\, 49{,}2'' \qquad \alpha + \beta = 83^0\, 42'\, 50'' = A' + B$$

$$45^0 - Z = -\ 2^0\, 3'\, 49{,}2'' \qquad \frac{\alpha + \beta}{2} = 41^0\, 51'\, 25''$$

ferner $\log tg\, (45^0 - Z) = 8{,}5567048\, (-)$

$$\log tg \frac{\alpha + \beta}{2} = 9{,}9522562$$

$$\log tg \frac{\alpha - \beta}{2} = 8{,}5089610\, (-); \quad \frac{\alpha - \beta}{2} = -\ 1^0\, 50'\, 56{,}3''$$

folglich $\alpha = 40^0\ 0'\, 28{,}7''$
$\beta = 43^0\, 42'\, 21{,}3''$;

daraus endlich

$$\begin{aligned} \log \sin C' &= 9{,}7065038 \\ \log \sin \alpha &= 9{,}8081395 \\ \hline & 9{,}5146433 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log \sin A' &= 9{,}9096612 \\ \log \sin (B' - B) &= 9{,}9597296 \\ \log c &= 3{,}8276923 \\ \hline & 3{,}6970831 \\ & - 9{,}5146433 \\ \hline \log x &= 4{,}1824398 \end{aligned}$$

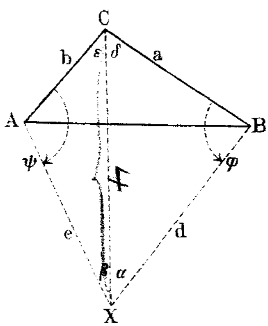
und $x = 15220{,}88$, wie vorhin.

Die Punkte C und C', deren Abstand bestimmt werden soll, können übrigens mannigfach verschiedene Lagen haben. Beide können, wie in unserer Fig. 24, auf derselben Seite der Standlinie AB, oder sie können auch auf entgegengesetzten Seiten dieser Standlinie liegen; der eine kann dabei außerhalb des Winkels, welchen die Richtungen von den Endpunkten der Standlinie auf den zweiten Punkt mit einander einschließen, oder zwischen diesen Richtungen oder in einer dieser Richtungen selbst liegen. In allen diesen Fällen bleiben die vorstehenden Formeln gültig, wenn man die Winkel A und A', so wie die Winkel B und B' immer von der Richtung der Standlinie AB aus durch Drehung nach derselben Seite hin entstanden ansieht und demgemäß als hohle oder überstumpfe darstellt, ihre Differenzen ($A - A'$ und $B' - B$) je nach dem Größenverhältniß als positiv, negativ oder 0 bezeichnet, und die Functionen aller dieser Winkel nach den im §. 10 gegebenen Vorschriften bestimmt. Die Nachweisung dieser Behauptung würde hier zu weit führen, ist aber als eine lehrreiche Uebung in trigonometrischen Begriffen und Formeln zu empfehlen.

2. Die zweite Aufgabe, welche hier gelöst werden soll, verlangt, wenn drei Punkte ihrer Lage nach bekannt sind, die Lage eines vierten in derselben Ebene liegenden Punktes durch die Winkel zu bestimmen, welche die von ihm auf jene Punkte zugehenden Richtungen mit einander einschließen. — (Pothenot'sches Problem.)

Die drei gegebenen Punkte seien A, B und C, Fig. 25. Es darf also jedes beliebige Stück des Dreiecks ABC als bekannt angenommen werden. Der gesuchte vierte Punkt sei X. Um seine Lage gegen jene Punkte zu bestimmen, sollen die Winkel $AXC = \beta$ und $CXB = \alpha$ gemessen sein.

Fig. 25.



Aus den genannten Stücken ist also entweder einer der Abstände AX, BX oder CX, oder in den Dreiecken ACX oder BCX einer der nicht gegebenen Winkel zu berechnen. Das Letztere muß jedenfalls zuerst geschehen, da in jedem der genannten Dreiecke unmittelbar nur zwei Stücke, eine Seite und der ihr gegenüberliegende Winkel, (a und α, b und β) gegeben sind. — Die Berechnung wird aber verschieden, je nachdem einer der Winkel am Scheitelpunkte C, — sie sind der Abkürzung wegen mit δ und ε bezeichnet, — oder einer der Winkel CBX und CAX, — sie mögen abgekürzt φ und ψ heißen, — gesucht wird.

Um einen der Winkel δ oder ε zu berechnen, erhält man für die beiden Dreiecken gemeinschaftliche Seite CX oder x nach 95)

$$x = a \cdot \cos\delta + d \cdot \cos\alpha = b \cdot \cos\varepsilon + e \cdot \cos\beta,$$

wenn in dieser Gleichung nach 98)

$$d = \frac{a \cdot \sin\delta}{\sin\alpha} \quad \text{und} \quad e = \frac{b \cdot \sin\varepsilon}{\sin\beta}$$

gesetzt wird,

$$a \cdot \cos\delta + a \cdot \cot\alpha \cdot \sin\delta = b \cdot \cos\varepsilon + b \cdot \cot\beta \cdot \sin\varepsilon,$$

ferner, wenn $\varepsilon = C - \delta$ gesetzt, und $\cos(C - \delta)$ so wie $\sin(C - \delta)$ nach 65) und 64) entwickelt werden,

$$a.\cos\delta + a.\cot\alpha.\sin\delta = b.\cos C.\cos\delta + b.\sin C.\sin\delta$$
$$+ b.\cot\beta.\sin C.\cos\delta - b.\cot\beta.\cos C.\sin\delta,$$

wenn sodann die ganze Gleichung durch $\sin\delta$ dividirt wird, bei einer leicht zu erkennenden Zusammenfassung der Glieder,

$$a.\cot\delta + a.\cot\alpha = \frac{b.\sin(C+\beta)}{\sin\beta}\cot\delta - \frac{b.\cos(C+\beta)}{\sin\beta},$$

und daraus endlich

$$\cot\delta = \frac{b.\cos(C+\beta) + a.\sin\beta.\cot\alpha}{b.\sin(C+\beta) - a.\sin\beta}. \qquad (116$$

Um dagegen die Winkel $CBX = \varphi$ und $CAX = \psi$ zu berechnen, hat man $\varphi + \psi = 360^0 - (C + \alpha + \beta)$; es ist mithin auch $\frac{\varphi + \psi}{2}$ bekannt, und dazu läßt sich auch $\frac{\varphi - \psi}{2}$ bestimmen, wie folgt.

Es ist
$$a.\sin\varphi = x.\sin\alpha$$
$$b.\sin\psi = x.\sin\beta,$$

also
$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{b.\sin\alpha}{a.\sin\beta},$$

und
$$\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \frac{b.\sin\alpha - a.\sin\beta}{b.\sin\alpha + a.\sin\beta} = \frac{1 - \frac{a.\sin\beta}{b.\sin\alpha}}{1 + \frac{a.\sin\beta}{b.\sin\alpha}},$$

mithin, wenn
$$\frac{a.\sin\beta}{b.\sin\alpha} = tg\,Z \qquad (117\,a$$

gesetzt wird, nach den Formeln 80) und 91)

$$\frac{tg\frac{\varphi - \psi}{2}}{tg\frac{\varphi + \varphi}{2}} = \frac{1 - tg\,Z}{1 + tg\,Z} = tg(45^0 - Z)$$

und
$$tg\frac{\varphi - \psi}{2} = tg(45^0 - Z).tg\frac{\varphi + \psi}{2}. \qquad (117\,b$$

Nachdem sodann aus den Werthen von $\frac{\varphi - \psi}{2}$ und $\frac{\varphi + \psi}{2}$ die Winkel φ und ψ selbst abgeleitet sind, berechnet sich

$$x = \frac{a.\sin\varphi}{\sin\alpha} \quad \text{oder} \quad = \frac{b.\sin\psi}{\sin\beta}. \qquad (117\,c$$

Die Anwendung dieser Formeln an einem Beispiele zu zeigen, sei gegeben

$$a = 3904 \qquad C = 104^0\,35'\,10''$$
$$b = 2688 \qquad \alpha = 38^0\,12'\,40''$$
$$\beta = 21^0\,42'\,\ 6''$$

Es ist also

$$C + \beta = 126^0\,17'\,16''$$
$$C + \alpha + \beta = 164^0\,29'\,56''$$
$$[360^0 - (C + \alpha + \beta) =] \qquad \varphi + \psi = 195^0\,30'\,\ 4''$$

und

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = 97^0\,45'\,\ 2''.$$

Nach der ersten Vorschrift findet man

$$\begin{aligned} \log b &= 3{,}4294293 \\ \log\cos(C+\beta) &= 9{,}7722052\ (-) \\ \log\sin(C+\beta) &= 9{,}9063645 \\ \log(b\,.\cos(C+\beta)) &= 3{,}2016345\ (-) \\ \log(b\,.\sin(C+\beta)) &= 3{,}3357938 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log a &= 3{,}5915098 \\ \log\sin\beta &= 9{,}5679361 \\ \log(a\,.\sin\beta) &= 3{,}1594459 \\ \log\cot\alpha &= 10{,}1038948 \\ \log(a\,.\sin\beta\,.\cot\alpha) &= 3{,}2633407 \end{aligned}$$

Die diesen Logarithmen entsprechenden Zahlen in die Formel 116) gesetzt, ergiebt sich

$$\cot\delta = \frac{-\ 1590{,}869\,.\,.\ +\ 1833{,}752\,.\,.}{2166{,}675\,.\,.\ -\ 1443{,}597\,.\,.} = \frac{242{,}883\,.\,.}{723{,}078\,.\,.}$$

$$\begin{aligned} \log 242{,}883\,.\,. &= 2{,}3853972 \\ \log 723{,}078\,.\,. &= 2{,}8591851 \\ \log\cot\delta &= 9{,}5262121 \\ \delta &= \mathbf{71^0\,25'\,58''} \\ \text{und}\quad [C - \delta =]\ \varepsilon &= \mathbf{33^0\ \ 9'\,12''} \end{aligned}$$

Nach der zweiten Vorschrift 117) findet man

$$\begin{aligned} \log a &= 3{,}5915098 \\ \log\sin\beta &= 9{,}5679361 \\ \log(a\,.\sin\beta) &= 3{,}1594459 \\ (-)\ \log(b\,.\sin\alpha) &= 3{,}2208117 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log b &= 3{,}4294293 \\ \log\sin\alpha &= 9{,}7913824 \\ \log(b\,.\sin\alpha) &= 3{,}2208117 \end{aligned}$$

$$\log tg\, Z = 9{,}9386342; \qquad Z = 40^0\,57'\,55{,}6''$$

$$\begin{aligned} 45^0 - Z &= 4^0\ \ 2'\ \ 4{,}4'' \\ \log tg\,(45^0 - Z) &= 8{,}8483917 \\ (+)\ \log tg\frac{\varphi+\psi}{2} &= 10{,}8661294\ (-) \\ \log tg\frac{\varphi-\psi}{2} &= 9{,}7145211\ (-) \\ \frac{\varphi-\psi}{2} &= -\ 27^0\,23'\,40'' \\ \frac{\varphi+\psi}{2} &= 97^0\,45'\ \ 2'' \\ \varphi &= \mathbf{70^0\,21'\,22''} \\ \psi &= \mathbf{125^0\ \ 8'\,42''}. \end{aligned}$$

Aus diesen Werthen ergeben sich mit Zuziehung der Werthe von α und β die von δ und ε genau so, wie sie oben gefunden wurden.

Schließlich findet man mit Hülfe dieser Winkel

$$CX = x = 5944{,}10$$
$$BX = d = 5982{,}92$$
und $$AX = e = 3975{,}45.$$

Auch diese zweite Aufgabe läßt verschiedene Voraussetzungen zu, sowohl hinsichtlich der Lage der drei gegebenen Punkte gegen einander als auch hinsichtlich der Lage des vierten gesuchten Punktes gegen jene. Die drei gegebenen Punkte können nämlich nicht bloß als die Ecken eines Dreiecks, sondern auch als in einer geraden Linie liegend angenommen werden, und der vierte gesuchte Punkt kann bei der ersten Annahme entweder im Umfange oder innerhalb oder außerhalb jenes Dreiecks liegen und im letzten Falle wieder entweder in die Richtung einer Dreiecksseite oder zwischen die Richtungen des einen oder anderen Seitenpaares, und sodann entweder vor die Oeffnung des Dreieckswinkels oder zwischen die Schenkel seines Scheitelwinkels fallen. Je nachdem die eine oder andere dieser Voraussetzungen zutrifft, unterliegt die Lösung der Aufgabe gewissen Abänderungen, kann jedoch in allen Fällen den vorhin entwickelten Formeln folgen, wenn bei Bestimmung der von denselben ausgehobenen Winkel immer der Richtungsunterschied der entsprechenden Seiten auf die nämliche Anfangsrichtung bezogen, und je nachdem derselbe durch eine Drehung in dem von der Formel angenommenen oder im entgegengesetzten Sinne zu erzeugen ist, als positiv oder negativ, oder den Umständen nach $= 0$ gesetzt wird, und wenn die Functionen der so bestimmten Winkel den Vorschriften des §. 10 gemäß bestimmt werden. Der Nachweis dieser Behauptung in allen einzelnen Voraussetzungen ist umständlich, aber zur Uebung in dergleichen Rechnungen als lehrreich zu empfehlen.

§. 16.

Bestimmung des Dreiecks durch einen Winkel, eine Seite und die Summe oder Differenz der beiden anderen Seiten.

Ein Dreieck kann nicht bloß durch drei Grundbestandtheile in der Art, wie dieses früher erörtert ist, sondern auch dadurch bestimmt werden, daß statt des einen oder anderen Grundbestandtheils die Summe oder Differenz von zweien gegeben wird. Zur Berechnung der fehlenden Stücke genügen auch unter solchen Voraussetzungen die bisher entwickelten

Formeln. Indessen gelingt die Auffindung der gesuchten Stücke mehr oder minder leicht, je nachdem man das Verfahren mehr oder minder zweckmäßig anordnet. Um hierfür einige Fingerzeige zu geben und zugleich zu zeigen, wie die trigonometrische Lösung der rein constructiven Lösung solcher Aufgaben zu Hülfe kommen kann, mögen hier noch einige Aufgaben der bezeichneten Art behandelt werden.

1. Zur Bestimmung eines Dreiecks sei gegeben ein Winkel, die ihm gegenüberliegende Seite und die Summe der beiden anderen (ihn einschließenden) Seiten: A, a und s $(= b + c)$.

a. Wollte man hieraus zunächst eine der beiden zuletzt genannten Seiten, b oder c, z. B. b, bestimmen, so erhielte man aus Gleichung 94), indem man $c = s - b$ setzte,

$$a^2 = b^2 + (s - b)^2 - 2b(s - b)\cos A$$

$$a^2 - s^2 = 2b^2(1 + \cos A) - 2bs(1 + \cos A)$$

nach 72) $$a^2 - s^2 = 4\left(\cos\frac{A}{2}\right)^2(b^2 - bs)$$

und daraus nach dem bekannten Verfahren der Auflösung gemischter quadratischer Gleichungen

118) $$b = \frac{s}{2} \mp \frac{\sqrt{a^2 - s^2.\left(\sin\frac{A}{2}\right)^2}}{2.\cos\frac{A}{2}}$$

Denselben Werth erhielte man auf demselben Wege auch für c. Da nun $b + c = s$ sein soll, so ist in dem Werthe des c der zweite Theil, die Wurzelgröße, negativ zu nehmen, wenn derselbe in dem Werthe des b positiv angenommen wird, und umgekehrt.

Nach der vorstehenden Formel 118) ließen sich allerdings die Seiten b und c des Dreiecks auch construiren. Die Construction der ganzen Figur ergiebt sich aber leichter, und zugleich wird auch die Berechnung derselben bequemer, wenn man

b. aus den gegebenen Stücken zuerst die beiden noch fehlenden Winkel des Dreiecks, B und C, bestimmt.

Man hat nämlich nach Gleichung 96), indem man in ihr $b + c = s$ setzt,
$$a.\cos\frac{B - C}{2} = s.\cos\frac{B + C}{2},$$

und da $B + C = 180^0 - A$, also $\frac{B + C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2}$, mithin $\cos\frac{B + C}{2} = \sin\frac{A}{2}$ ist,

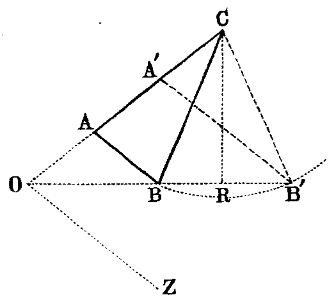
$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{s}{a} \cdot \sin\frac{A}{2}. \qquad (119$$

Aus $\frac{B-C}{2}$ und $\frac{B+C}{2}$ findet man hiernächst B und C, und aus den Winkeln und der Seite a nach 98) die beiden fehlenden Seiten b und c.

Auf diesem Wege wird namentlich die logarithmische Berechnung der fehlenden Dreiecksstücke ungleich geschmeidiger.

Derselbe Weg führt aber leicht auch zu folgender Construction der Figur. In Fig. 26 sei COZ der gegebene Winkel A. Man halbirt denselben, durch die Linie OB, und trägt auf den einen Schenkel vom Scheitelpunkte aus die Länge $s = OC$ auf: so ist ein Loth vom Endpunkte derselben auf die Halbirungslinie, $CR = s \cdot \sin\frac{A}{2}$. Von demselben Endpunkte C aus die Seite $a = CB = CB'$, (welche bekanntlich immer kleiner als s sein muß), als Hypotenuse den rechten Winkeln bei R gegenübergelegt, ist

Fig. 26.



$$\frac{CR}{CB} = \frac{CR}{CB'} = \frac{s \cdot \sin\frac{A}{2}}{a} = \cos\frac{B-C}{2} = \cos BCR = \cos B'CR.$$

Da nun Winkel $OCR = 90^0 - \frac{A}{2} = \frac{B+C}{2}$, so ist

$$OCB = \frac{B+C}{2} - \frac{B-C}{2} = C$$

und $$OCB' = \frac{B+C}{2} + \frac{B-C}{2} = B,$$

Wird nun durch den Punkt B oder B' eine Linie, BA oder $B'A'$, parallel mit dem zweiten Schenkel des gegebenen Winkels OZ gezogen, so ist das dadurch gebildete Dreieck BCA oder $B'CA'$, wie leicht ersichtlich, das verlangte.

Den Punkt A oder A' in dem Schenkel OC, zu welchem von B oder B' aus die fehlende Seite des Dreiecks zu ziehen ist, kann man auch dadurch finden, daß man in der Mitte von OB oder von OB'

ein Loth errichtet und dieses bis zum Durchschnitt mit dem Schenkel OC verlängert.

Die Figur giebt ferner an die Hand, daß immer $a > s.\sin\frac{A}{2}$, d. i. $CB > CR$ sein muß, oder höchstens $a = s.\sin\frac{A}{2}$, $CB = CR$, sein kann, und welche Beschaffenheit des gesuchten Dreiecks aus der letzteren Voraussetzung folgt. Dieselben Bestimmungen sind auch aus Formel 118) abzuleiten. — Die dadurch ausgedrückten Werthe für die Seiten b und c können nun ebenfalls in unserer Fig. 26 nachgewiesen werden.

2. Zur Bestimmung eines Dreiecks sei gegeben ein Winkel, die ihm gegenüberliegende Seite und die Differenz der beiden anderen (ihn einschließenden) Seiten: A, a und d $(= b - c)$.

a. Um aus diesen Stücken eine der zuletzt genannten Seiten, z. B. b zu berechnen, setze man in Gleichung 94) $c = b - d$ und löse sie sodann in Bezug auf b auf. Man erhält so

$$a^2 = b^2 + (b - d)^2 - 2b(b - d)\cos A$$

$$a^2 - d^2 = 2b^2(1 - \cos A) - 2bd(1 - \cos A)$$

nach 71) $$= 4\left(\sin\frac{A}{2}\right)^2 (b^2 - bd),$$

120) daraus $$b = \frac{\sqrt{a^2 - d^2\left(\cos\frac{A}{2}\right)^2}}{2\sin\frac{A}{2}} + \frac{d}{2}$$

und $$c = \frac{\sqrt{a^2 - d^2\left(\cos\frac{A}{2}\right)^2}}{2\sin\frac{A}{2}} - \frac{d}{2} \quad [= b - d].$$

Der negative Werth der Wurzelgröße $\sqrt{a^2 - d^2\left(\cos\frac{A}{2}\right)^2}$ ist zur Bestimmung der Werthe von b und c offenbar nicht zulässig, weil $a > d$ sein muß.

Den Werth von c hätte man auch aus der Gleichung 94) ableiten können, indem man in ihr $b = c + d$ gesetzt und sie alsdann in Bezug auf c aufgelöst hätte.

b. Einfacher gestaltet sich die Rechnung, wenn man durch die gegebenen Stücke zuerst die **beiden noch fehlenden Winkel** des Dreiecks B und C bestimmt.

Es wird nämlich Gleichung 97), wenn man in ihr $b - c = d$ setzt,

$$a \cdot \sin\frac{B-C}{2} = d \cdot \sin\frac{B+C}{2},$$

und da $\frac{B+C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2}$, folglich $\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}$ ist,

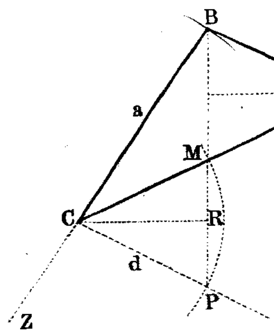
$$\sin\frac{B-C}{2} = \frac{d}{a} \cdot \cos\frac{A}{2}. \qquad (121$$

Aus $\frac{B-C}{2}$ und $\frac{B+C}{2}$ berechnen sich sodann die Winkel B und C, und aus diesen und der Seite a nach bekannten Formeln auch die Seiten b und c.

Nach der Gleichung 121) ist es auch leicht, den Winkel $\frac{B-C}{2}$ und mit Hülfe desselben B und C zu construiren.

Man trage Fig. 27 auf die beiden Schenkel des Winkels $A = MCP$ vom Scheitelpunkte aus die Länge $d = CM = CP$ auf, ziehe MP und auf die Mitte derselben die den Winkel A halbirende Linie CR, beschreibe nun mit a als Radius einen Kreis um C und ziehe durch den Durchschnittspunkt desselben in der Verlängerung der Basis PM $(a > d)$ und den Punkt C die Linie BCZ: so ist $BCA = C$ und $PCZ = B$.

Fig. 27.



Denn nach der Construction ist $CR = d \cdot \cos\frac{A}{2}$ und $\frac{CR}{CB}$

$$= \frac{d \cdot \cos\frac{A}{2}}{a} = \sin CBR = \sin\frac{B-C}{2}, \text{ also } CBR = \frac{B-C}{2}.$$

Ferner ist $CMR = 90^0 - \frac{A}{2} = \frac{B+C}{2}$, folglich $BCM = CMR - CBR = C$ und $ZCP = 180^0 - (A + C) = B$.

Das verlangte Dreieck selbst findet man offenbar, wenn man durch

B eine Parallele zu CP legt und diese bis zum Durchschnitt mit der Verlängerung von CM (in A) fortsetzt, — oder wenn man in der Mitte von BM ein Loth errichtet, dieses bis zum Durchschnitt mit der Seite CM fortführt und den Durchschnittspunkt A mit dem Punkte B durch eine gerade Linie verbindet.

3. Ein Dreieck soll bestimmt werden durch einen Winkel, eine ihm anliegende Seite und die Summe der beiden anderen Seiten: A, c und s $(= a + b)$.

a. Um aus diesen Angaben die dem gegebenen Winkel gegenüberliegende Seite a zu berechnen, setze man in Gleichung 94) $b = s - a$. Man erhält alsdann

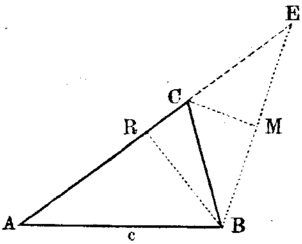
$$a^2 = (s - a)^2 + c^2 - 2(s - a)\, c \,.\, \cos A$$

und daraus durch Operationen, wofür es keiner Anleitung bedarf,

122) $$a = \frac{s^2 + c^2 - 2s \,.\, c \,.\, \cos A}{2(s - c \,.\, \cos A)}.$$

Diese Formel führt leicht auf eine Construction des gesuchten Dreiecks. — Man erkennt nämlich wohl ohne Weiteres in dem Zähler dieses Ausdrucks (nach Gleichung 94) das Quadrat des Werthes der dritten Seite in einem Dreieck, welches aus dem Winkel A und den beiden ihn einschließenden Seiten s und c gebildet ist. Wenn in Fig. 28 A der gegebene Winkel und $AB = c$ und $AE = s$ gemacht ist, so ist

Fig. 28.



$$s^2 + c^2 - 2sc \,.\, \cos A = EB^2.$$

Ferner wird der Factor des Nenners $s - c \,.\, \cos A$ gefunden, wenn man von B ein Loth auf die Seite BE, nämlich BR fällt. Denn nun ist $AR = c \,.\, \cos A$ und $ER = s - c \,.\, \cos A$; folglich

$$a = \frac{EB^2}{2 \,.\, ER} = \frac{EB}{2} \,.\, \frac{EB}{ER}.$$

Es ist aber $\dfrac{ER}{EB} = \cos E$, mithin $a = \dfrac{\frac{1}{2} EB}{\cos E}$.

Wenn also schließlich in der Mitte von EB, nämlich M, ein Loth errichtet wird, MC, so ist das dadurch begränzte Stück

$$EC = \frac{\frac{1}{2} EB}{\cos E} = a, \quad \text{und} \quad AC = s - a = b.$$

Es leuchtet ohne Weiteres ein, daß auch $BC = EC = a$ wird, also ACB das verlangte Dreieck ist.

Für die Construction desselben ergiebt sich hieraus die einfache Regel: man trage auf die Schenkel des gegebenen Winkels A vom Scheitelpunkte aus die Längen $c = AB$ und $s = AE$ als Seiten auf, verbinde deren Endpunkte durch die dritte Seite EB und trage den Winkel E, welchen sie mit der Seite s $(= AE)$ einschließt, an ihrem zweiten Endpunkte B, als EBC, nochmals nach derselben Seite an sie an; das durch den zweiten Schenkel dieses Winkels abgeschnittene Dreieck ABC ist das verlangte.

Die Aenderungen, welchen die Lösung der vorstehenden Aufgabe unterworfen ist, wenn der gegebene Winkel A ein rechter oder stumpfer ist, wird Jeder auch ohne weitere Anleitung finden.

b. Soll aus den gegebenen Stücken A, c und s $(= a + b)$ einer der abhängigen Winkel berechnet werden, so eignet sich dazu am besten der zweite an der gegebenen Seite liegende Winkel B, und die Rechnung erhält die geschmeidigste Form in folgender Weise.

Die durch Gleichung 96) ausgedrückte Beziehung zwischen fünf Grundbestandtheilen des Dreiecks, auf die Winkel A und B übertragen, heißt:

$$c \,.\, cos\frac{A - B}{2} = (a + b)\, cos\frac{A + B}{2} = s \,.\, cos\frac{A + B}{2},$$

wenn $a + b = s$ gesetzt wird.

Aus $$\frac{cos\frac{A - B}{2}}{cos\frac{A + B}{2}} = \frac{s}{c}$$ ergiebt sich ferner

$$\frac{cos\frac{A - B}{2} - cos\frac{A + B}{2}}{cos\frac{A - B}{2} + cos\frac{A + B}{2}} = \frac{s - c}{s + c}$$

und daraus nach Formel 81), wenn in derselben $\frac{A - B}{2}$ statt A und $\frac{A + B}{2}$ statt B, also auch $\frac{A}{2}$ statt $\frac{A + B}{2}$ und $\frac{B}{2}$ statt $\frac{A - B}{2}$, und schließlich nach 61)

$$tg\left(-\frac{B}{2}\right) = -\, tg\frac{B}{2}$$ gesetzt wird,

$$tg\frac{B}{2}\cdot tg\frac{A}{2}=\frac{s-c}{s+c}\quad .$$

123) und
$$tg\frac{B}{2}=\frac{s-c}{s+c}\cdot cot\frac{A}{2}.$$

Auch nach dieser Formel läßt sich das gesuchte Dreieck construiren, indem man nach ihr zuerst den Winkel $\frac{B}{2}$ bestimmt. Die Construction wird indessen nicht in dem Grade einfach, wie die vorhin (unter a) angegebene.

4. Ein Dreieck soll bestimmt werden durch einen Winkel, eine ihm anliegende Seite und die Differenz der beiden anderen Seiten: A, c und d ($= a - b$ oder $= b - a$).

Ist der gegebene Winkel A ein spitzer, so kann a größer oder kleiner als b, mithin $d = a - b$ oder $= b - a$ sein. Ist aber dieser Winkel A ein rechter oder stumpfer, so muß $a > b$, mithin $d = a - b$ sein.

a. Es werde nun zuerst die dem Winkel A gegenüberliegende Seite a gesucht.

Zur Berechnung derselben erhält man, wenn der Winkel A ein spitzer und $a > b$, mithin $d = a - b$ sein soll, indem man in Gleichung 94) $b = a - d$ setzt,

$$a^2 = (a-d)^2 + c^2 - 2(a-d)\,c.cos\,A$$

124 a) und daraus
$$a = \frac{d^2 + c^2 + 2dc.cos\,A}{2(c.cos\,A + d)}$$

oder, wenn $a < b$, mithin $d = b - a$ sein soll, indem man in Gleichung 94) $b = a + d$ setzt,

$$a^2 = (a+d)^2 + c^2 - 2(a+d)\,c.cos\,A$$

124 b) und daraus
$$a = \frac{d^2 + c^2 - 2dc.cos\,A}{2(c.cos\,A - d)}.$$

Bei der zweiten Annahme, daß der gegebene Winkel A ein rechter oder stumpfer, also $a > b$ und $d = a - b$ sei, erhält man in der ersten Voraussetzung, wenn $b = a - d$ (und $cos\,A = 0$) gesetzt wird,

$$a^2 = (a-d)^2 + c^2,$$

124 c) und daraus
$$a = \frac{d^2 + c^2}{2d},$$

in der zweiten Voraussetzung:

$$a^2 = (a - d)^2 + c^2 + 2(a - d)\, c \,.\, cos\, A$$

und
$$a = \frac{d^2 + c^2 - 2dc\,.\,cos\,A}{2(d - c\,.\,cos\,A)}. \qquad (124\,d$$

Die Construction des gesuchten Dreiecks aus den gegebenen Stücken ist in den vier unterschiedenen Fällen durch die Figuren 29 bis 32 dar=

Fig. 29.

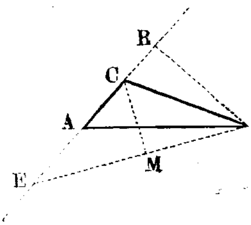


Fig. 30.

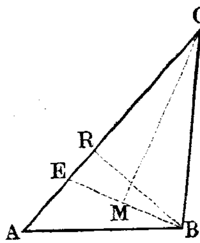


Fig. 31.

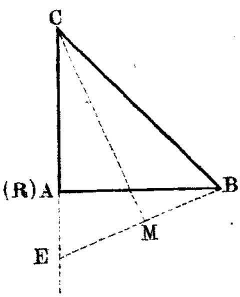
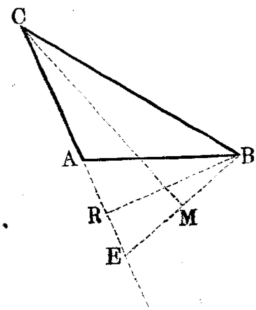


Fig. 32.



gestellt. In allen diesen Figuren ist der Winkel CAB als der gegebene Winkel A, $AB = c$ und $AE = d$ angenommen. Die Differenz AE oder d ist in den drei Fällen, wo die dem Winkel A gegenüber zu legende Seite a größer als die ihm anzulegende Seite b sein soll — Fig. 29, 31 und 32, entsprechend den Formeln 124,a, 124,c und 124,d — auf den rückwärts verlängerten zweiten Schenkel des Winkels A vom Scheitelpunkte aus aufgetragen, in dem Falle aber, wo a kleiner als b sein soll, — Fig. 30, entsprechend der Formel 124,b — auf den Schenkel dieses Winkels selbst. In allen Fällen stellt BE die Wurzel des Zählers der entsprechenden Formel dar, und in allen Fällen ist der Winkel CBE = Winkel CEB gemacht, so daß immer

$$BC = \frac{EB^2}{2 . ER} = \frac{EB}{2} \cdot \frac{EB}{ER} = \frac{\frac{1}{2} EB}{\cos CEB} = \frac{BM}{\cos CBE} = a$$

ist.

Man sieht außerdem leicht ein, daß in Fig. 30, entsprechend Formel 124,b, $AR > AE$ oder $c . \cos A > d$, in Fig. 32 dagegen, entsprechend Formel 124,d, $AR < AE$ oder $c . \cos A < d$ sein muß.

b. Die Berechnung des Dreiecks aus den angegebenen Stücken gestaltet sich am einfachsten, wenn man zuerst den zweiten an der gegebenen Seite (c) liegenden Winkel B sucht, und zwar auf folgende Weise.

Die in Gleichung 97) ausgedrückte Beziehung zwischen zwei Winkeln und den drei Seiten des Dreiecks, auf die Winkel A und B bezogen, giebt

$$c . \sin \frac{A-B}{2} = (a-b) \sin \frac{A+B}{2},$$

mithin, wenn $a - b = d$ gesetzt wird,

$$\frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}} = \frac{d}{c}.$$

Daraus folgt weiter

$$\frac{\sin \frac{A+B}{2} - \sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2} + \sin \frac{A-B}{2}} = \frac{c-d}{c+d},$$

und nach Formel 80), wenn in ihr $\frac{A+B}{2}$ statt A und $\frac{A-B}{2}$ statt B, also auch $\frac{A}{2}$ statt $\frac{A+B}{2}$ und $\frac{B}{2}$ statt $\frac{A-B}{2}$ gesetzt wird,

$$\frac{tg \frac{B}{2}}{tg \frac{A}{2}} = \frac{c-d}{c+d},$$

mithin

125) $$tg \frac{B}{2} = \frac{c-d}{c+d} \cdot tg \frac{A}{2}.$$

Die weitere Auflösung des Dreiecks bedarf keiner Anleitung. — Auch die Construction des Winkels B nach dieser Formel und folgeweise die des ganzen Dreiecks wird Jeder leicht selbst finden.

Aehnliche Aufgaben, wie die in diesem Paragraph behandelten, ließen sich mit mannigfaltiger Abwechselung der Voraussetzungen in großer Zahl anreihen. Es genügt indessen, an den vorigen gezeigt zu haben, wie durch geschickte Wendung der Rechnung die Auflösung solcher Aufgaben mehr oder weniger vereinfacht werden kann. — Eine reiche Auswahl solcher Aufgaben und die Anleitung zur zweckmäßigen Lösung derselben enthält die »Sammlung trigonometrischer Aufgaben ꝛc. von F. Seydewitz, Heiligenstadt bei F. Delion, 1839.«

Berichtigungen.

Seite 20 Zeile 8 von unten

statt: $log\, {}^2/_{35} = 8{,}7369620\ (-10) = log\, sin\, 3^0\ 7'\, 41''$ ꝛc.

ist zu setzen: $log\, {}^2/_{35} = 8{,}7569620\ (-10) = log\, sin\, 3^0\, 16'\, 33''$

also die Neigung $C = 3^0\, 16'\, 33''$

Seite 39 Formel Nr. 89) statt:

$$cot\, A - cot\, B = \frac{sin\,(A - B)}{sin\, A\, .\, sin\, B}$$

ist zu setzen: » » » $= - \dfrac{sin\,(A - B)}{sin\, A\, .\, sin\, B}$

und Formel Nr. 90) statt:

$$\frac{tg\, A - tg\, B}{tg\, A + tg\, B} = \frac{sin\,(A - B)}{sin\,(A + B)} = \frac{cot\, A - cot\, B}{cot\, A + cot\, B}$$

ist zu setzen: » » $= - \dfrac{cot\, A - cot\, B}{cot\, A + cot\, B}$.

Seite 57 in Fig. 23 sind die Zeichen der Seiten a und b zu vertauschen.

Seite 69 Zeile 7 von unten fehlt im Anfange der Zeile: »Wird« nun ꝛc.